מבוא לתורת הקבוצות

גדי אלכסנדרוביץ'

איור השער: תמר עקביה

תוכן העניינים

הקדמה

תורת הקבוצות היא תחום חדש יחסית במתמטיקה; היא הומצאה בידי גאורג קנטור רק לקראת סוף המאה ה-19. אף על פי כן, לדעתי תורת הקבוצות היא התחום הטוב ביותר להתחיל איתו את לימודי המתמטיקה. יש לכך מספר סיבות:

ראשית, המושגים הבסיסיים של תורת הקבוצות נותנים את ה"שפה" המשותפת שבה משתמשים כמעט כל הטקסטים המתמטיים המודרניים; ובעוד שבתחומים אחרים של המתמטיקה השפה משמשת ללימוד תחום אחר, בתורת הקבוצות הבסיסי מוקדש ללימוד השפה עצמה.

שנית, לימוד תורת הקבוצות גם ממחיש היטב את **אופן** העבודה המתמטי המודרני; את אופי הטקסט הבנוי על הגדרות, משפטים והוכחות; את שיטות ההוכחה עצמן ואת אופי ההפשטות שבהן משתמשים בלימודי מתמטיקה.

לבסוף, אולי הסיבה החשובה ביותר היא שבתורת הקבוצות ניתן לראות תוצאות **יפות** כמעט ללא שום ידע קודם. התגליות של קנטור התקבלו כהפתעה גמורה למתמטיקאים בני זמנו ונותרו מרתקות עד היום. את חלקן ניתן להציג באופן מלא ללא שום רקע קודם מצד הקורא, וזאת בניגוד למרבית התוצאות המתמטיות המרשימות שדורשות מהקורא ידע לא זניח בתחומי המתמטיקה השונים.

פרק 1 מציג את השפה הבסיסית של תורת הקבוצות - מושג הקבוצה, אופי הכתיבה המתמטית, ופעולות פשוטות על קבוצות, ומסיים בהצגת דוגמה לבניה מתמטית - במקרה זה, של אחד מהאובייקטים המתמטיים הבסיסיים ביותר: המספרים הטבעיים.

פרק 2 ממשיך את פרק 1 על ידי הצגת מושג מרכזי מתורת הקבוצות - מושג **היחס**. הפרק עוסק בסוגים שונים של יחסים והשימושים שלהם, ובפרט במושג ה**פונקציה** שהוא ככל הנראה המושג המרכזי במתמטיקה. כמו כן הפרק מנצל את המושגים החדשים שמוצגים בו על מנת להציג את בניית מערכות המספרים הבאות לאחר המספרים הטבעיים: השלמים, הרציונליים והממשיים.

פרק 3 מציג את התגליות הבסיסיות של קנטור: האופן שבו הוא משווה את גודלן של קבוצות אינסופיות והגילויים בדבר תכונותיהן המפתיעות של קבוצות אינסופיות ביחס לשיטת השוואה זו.

פרקים 1 ו-2 כוללים את הרקע הבסיסי הנדרש בתורת הקבוצות עבור כל מי שלומד מתמטיקה ומומלצים לקריאה לכל אחד; פרק 3 כולל חומר מתקדם מעט יותר שאינו נדרש לרוב במתמטיקה (אף כי יש בו מספר שימושים מפתיעים), אך בשל יופיו הוא עדיין מומלץ לכל הקוראים.

פרקים 4,5,6 עוברים להציג את הבסיס של תורת הקבוצות האקסיומטית: האקסיומות של תורת הקבוצות והמושגים הפורמליים של מספרים סודרים ומספרים מונים, שבאמצעותם ניתן לקיים דיון מדויק יותר בנושאים שתוארו בפרק 3. זהו חומר מתקדם ומאתגר יותר, עבור הקוראים אשר פרקים 1-3 הציתו את סקרנותם.

1 תורת הקבוצות הנאיבית - מושגי יסוד

1.1 הגדרות בסיסיות

המושג הבסיסי בתורת הקבוצות הוא, כצפוי, **קבוצה**. קבוצה מורכבת מאפס או יותר **איברים**, אשר בגישתנו הנאיבית יכולים להיות כל דבר שהוא.

- קבוצה מסומנת לרוב באופן מפורש באמצעות סוגריים מסולסלים ובתוכם פירוט של איברי הקבוצה:
  - $\{1,2,5,7\}$ היא הקבוצה שמכילה את המספרים 1,2,5,7.
  - $\{16,\pi,\text{Dog},\text{מגדל אייפל}\}$ היא קבוצה שמכילה את המספר הטבעי 16, המספר האי רציונלי פאי, המילה Dog והביטוי "מגדל אייפל". בפרט, איברי הקבוצה אינם חייבים להיות כולם מאותו "סוג".
  - $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ היא הקבוצה שכוללת את כל המספרים הטבעיים. מכיוון שיש אינסוף כאלו לא כותבים את כולם במפורש אלא מסתפקים בכתיבת האיברים הראשונים ושלוש נקודות שמשמעותן המדוייקת היא "ומכאן והלאה ממשיכים על פי אותו כלל" (ההנחה היא שהקורא מסוגל להבין מהו הכלל; קיימת הגדרה מדוייקת יותר למספרים הטבעיים).
  - לעתים קרובות קבוצה מתוארת באופן הבא: $A=\{\text{תנאי על האיבר} \mid \text{איבר}\}$ (מכיוון שמתמטיקה נקראת משמאל לימין, קודם כל מופיע האיבר ורק לאחר מכן התנאי עליו). דוגמאות יינתנו בהמשך.
- איבר יכול להיכלל בקבוצה בדיוק פעם אחת. אם הוא מופיע יותר מפעם אחת, הוא נספר בדיוק פעם אחת. כלומר, $\{1,1,1\}=\{1\}$.
- קבוצות מסומנות לרוב באותיות לטיניות גדולות מראשית הא"ב: A,B,C. עם זאת, משתמשים בסימונים רבים ושונים בהתאם למשמעות שאנו מייחסים לקבוצה.
- אם איבר x שייך לקבוצה A מסמנים זאת על ידי $x\in A$. אם x אינו שייך לקבוצה A מסמנים זאת $x\notin A$.
  - הנחת יסוד: לכל x ולכל קבוצה A, או שמתקיים $x\in A$ או שמתקיים $x\notin A$ ולא ייתכן ששניהם מתקיימים בו זמנית.
  - הנחת יסוד: בהינתן שתי קבוצות A,B, אם לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$ ובנוסף לכך לכל $y\in B$ מתקיים $y\in A$ אז $A=B$ (בתורת הקבוצות האקסיומטית זוהי **אקסיומת ההיקפיות**).
  - הנחת יסוד: קיימת קבוצה A כך שלכל x מתקיים $x\notin A$. הקבוצה A הזו נקראת **הקבוצה הריקה** ומסומנת ב-$\emptyset$ ולפעמים ב-$\{\}$ (בתורת הקבוצות האקסיומטית, **אקסיומת הקבוצה הריקה** דורשת במפורש את קיום הקבוצה הזו). כדאי לחשוב על קבוצות כעל "קופסאות", ואז הקבוצה הריקה היא פשוט קופסה ריקה.
- אם לכל $x\in A$ מתקיים $x\in B$ אז מסמנים זאת על ידי $A\subseteq B$ ואומרים ש-"A מוכלת ב-B", או ש"A היא תת-קבוצה של B". אם בנוסף לכך קיים $y\in B$ כך ש-$y\notin A$ אז אומרים ש-"A מוכלת **ממש** ב-B" ומסמנים זאת על ידי $A\subset B$, ולעתים באופן מפורש יותר על ידי $A\subsetneq B$ כדי למנוע בלבול[1].

נציג כעת דוגמאות נוספות לקבוצות:

1. $\mathbb{N}^+=\{1,2,3,\dots\}$ - קבוצת המספרים הטבעיים ללא אפס (יש המגדירים מראש שאפס איננו מספר טבעי; כפי שנראה בהמשך, עבורנו יהיה נוח להגדיר את 0 כמספר טבעי).
2. $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ - המספרים השלמים. שימו לב כי תיארנו אותה עם שלוש נקודות "בשני הכיוונים".
3. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\text{ and }b\neq0\right\}$ - המספרים הרציונליים. שימו לב לסגנון הכתיבה: בצד שמאל כתוב איבר $\frac{a}{b}$ ובצד ימין כתובים התנאים עליו - a,b שניהם שלמים, ו-$b\neq0$.
4. $\mathbb{R}$ - קבוצת המספרים הממשיים שלא תוגדר במפורש בשלב זה אך ניתן לחשוב עליה כעל אוסף כל המספרים שניתן לתאר בייצוג עשרוני (ההגדרות הסטנדרטיות מתבססות על **חתכי דדקינד** או על **סדרות קושי**; נתאר את ההגדרה באמצעות חתכי דדקינד בסעיף 4.1.2).
5. $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le1\}$ - הקטע הסגור שמכיל את כל המספרים הממשיים בין 0 ל-1 כולל.

[1] לרוע המזל, יש ספרים שמשתמשים ב-$A\subset B$ במשמעות של $A\subseteq B$, אך לא נעשה זאת בספר זה.

6. $(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$ - הקטע הפתוח שמכיל את כל המספרים הממשיים בין 0 ל-1 לא כולל.

7. $A=\{\emptyset\}$ היא קבוצה בעלת איבר בודד, ואיבר זה הוא הקבוצה הריקה. נשים לב לכך ש-$A\neq\emptyset$ כי ל-$\emptyset$ אין איברים ול-A יש.

8. $A=\{A\}$ היא קבוצה שמכילה איבר בודד - את עצמה. הגדרה זו נראית מוזרה מאוד אבל בינתיים נתיר אותה.

1.2 הפרדוקס של ראסל

נציג כעת במפורש בעיה שעשויה להיווצר משימוש חופשי מדי בהגדרות שנתנו. נגדיר את הקבוצה הבאה:

$X=\{A\mid A\notin A$ קבוצה וגם $A\}$

במילים - X היא קבוצת כל הקבוצות שאינן איבר של עצמן.

הגדרה זו מובילה לפרדוקס הבא: X אינה יכולה להיות איבר של עצמה, אבל גם אינה יכולה שלא להיות איבר של עצמה, שכן:

- אם $X\in X$ אז על פי הקריטריון שמגדיר שייכות ל-X מתקיים $X\notin X$ - סתירה להנחת היסוד שלנו שאיבר לא יכול להיות שייך ולא-שייך בו זמנית לקבוצה.

- אם $X\notin X$ אז בפרט X אינה מקיימת את הקריטריון של שייכות ל-X, כלומר X **אינה** מקיימת את התכונה $X\notin X$ ולכן $X\in X$ ושוב הגענו לסתירה.

המסקנה מהפרדוקס של ראסל היא שלא כל קבוצה שניתן להגדיר באופן מילולי אכן קיימת. בפועל, ה"סכנה" ליפול על הגדרות לא הגיוניות היא זניחה ברוב תחומי המתמטיקה. לעת עתה נתעלם מהבעיה שבפרדוקס של ראסל (אף שבהמשך לא נעשה שום דבר שעשוי להוביל לפרדוקס דומה); בפרק ?? נעסוק באופן שבו ניתן לבנות את תורת הקבוצות באופן אקסיומטי שמונע היווצרות של הפרדוקס.

הנחת יסוד אחת של תורת הקבוצות האקסיומטית שנציג כבר כעת היא שאם A היא קבוצה כלשהי, אז כל אוסף מהצורה $\{a\in A|\dots\}$ הוא בעצמו קבוצה.

מהנחת יסוד זו נובעת מייד המסקנה הבאה מהפרדוקס של ראסל, הנוגעת לקבוצת "כל האיברים", שתכונה **הקבוצה האוניברסלית**:

מסקנה 1.1 הקבוצה האוניברסלית אינה קיימת.

זאת מכיוון שאם הקבוצה האוניברסלית הייתה קיימת, אז גם X החלקית לה הייתה קיימת.

1.3 כמה סימונים לוגיים

על מנת לפשט כתיבה של ביטויים והוכחות מתמטיות בהמשך, נציג מספר סימונים שבהם נהוג להשתמש בלוגיקה.

- במקום "וגם" נהוג להשתמש בסימן $\wedge$. כך למשל $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}$.

- במקום "או" נהוג להשתמש בסימן $\vee$. אם C,D הם שני תנאים, אז $C\vee D$ פירושו "או ש-C מתקיים, או ש-D מתקיים, או ששניהם מתקיימים".

- אם C היא טענה, אז השלילה של C מסומנת ב-$\neg C$ או $\sim C$. השלילה של C נכונה אם C אינה נכונה, ולהפך.

- אם C,D הן טענות אז הטענה $C\Rightarrow D$ (קרי: "C **גורר** את D") היא קיצור של $\neg C\vee D$. כלומר, היא טענה שנכונה באחד משני המקרים הבאים:
  - אם C נכונה וגם D נכונה.
  - אם C לא נכונה.

- אם C,D הן טענות אז הטענה $C\iff D$ (קרי: "C **שקול** ל-D") היא קיצור של $(C\Rightarrow D)\wedge(D\Rightarrow C)$. כלומר, היא טענה שנכונה באחד משני המקרים הבאים:
  - אם C נכונה וגם D נכונה.
  - אם C לא נכונה וגם D לא נכונה.

- ההגדרה של $C\Rightarrow D$ עשויה לגרום לקשיים עם האינטואיציה. כך למשל הטענה "אם מגדל אייפל נמצא בלונדון, אז $\pi=3$" היא **נכונה** לחלוטין שכן הרישא של הטענה ("מגדל אייפל נמצא בלונדון") שגוי. גם טענה כמו "אם מגדל אייפל נמצא בפריז אז $\pi<5$" היא נכונה לחלוטין למרות שהטענה נשמעת מוזרה. האינטואיציה מצפה שאם מתקיים ש-$C\Rightarrow D$ אז יהיה קשר לוגי ברור בין C ו-D, אולם בהגדרה שנתנו קשר שכזה כלל לא נדרש.

- משפטים מתמטיים רבים מנוסחים בסגנון "אם A אז B" שמשמעותו $A \Rightarrow B$. או בסגנון "A רק אם B" שמשמעותו $A \Rightarrow B$.
- משפטים אחרים מנוסחים בסגנון "A אם ורק אם B" שמשמעותו $A \iff B$ (מקוצר לפעמים בתור "אםם", ובאנגלית iff).
- הוכחה של טענה מהצורה "A גורר B" מתחילה לרוב מ**ההנחה** ש-A נכונה, ואז שרשרת טענות שנובעות זו מזו, ובסופו של דבר הגעה ל-B.
- הוכחה של טענה מהצורה "A אם ורק אם B" דורשת הוכחה של **שני** כיוונים שונים: צריך להוכיח את "אם A אז B" **וגם** את "אם B אז A". לפעמים הוכחת שני הכיוונים זהה או דומה מאוד ולכן ניתן לקצר, אבל באופן כללי הוכחה שאיננה דו כיוונית היא שגויה.
- לעתים במקום להוכיח את "A גורר B" נוח יותר להוכיח את "$\neg B$ גורר $\neg A$" אשר שקול לוגית ל-"A גורר B". לעתים מבלבלים זאת עם **הוכחה בשלילה**, שבה כדי להוכיח טענה מניחים את שלילתה ומגיעים לסתירה, אך הוכחה בשלילה היא שיטה כללית יותר (הסתירה אינה חייבת להיות $\neg A$ דווקא).
- במקום לכתוב "קיים" נהוג לכתוב $\exists$ ובמקום לכתוב "לכל" נהוג לכתוב $\forall$.

  כך למשל הגדרת הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ בחדו"א נכתבת כ-

$$\forall\varepsilon > 0\left(\exists\delta > 0\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)\right)$$

1.4 טענות בסיסיות על קבוצות

נתחיל בהוכחה של מספר "משפטים" מועילים שגם יעזרו לנו לקבל תחושה לגבי אופיין של הוכחות מתמטיות:

טענה 1.2 תהיינה A, B קבוצות. אז $A = B$ אם ורק אם $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (**אנטי-סימטריות** יחס ההכלה).

הוכחה: כיוון אחד: נניח ש-$A = B$. יהי $x \in A$. מכיוון ש-$A = B$ בפרט יש להן אותם איברים, ולכן $x \in B$ ולכן $A \subseteq B$. באותו האופן מוכיחים $B \subseteq A$.

כיוון שני: נניח ש-$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. אם $x \in A$ אז מכיוון ש-$A \subseteq B$ מתקיים $x \in B$. אם $y \in B$ אז מכיוון ש-$B \subseteq A$ מתקיים $y \in A$. מהנחת היסוד שלנו ("אקסיומת ההיקפיות") נובע ש-$A = B$. ■

טענה 1.3 לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$.

הוכחה: אנו רוצים להוכיח שאם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$. מכיוון שאין $x \in \emptyset$, הרישא של הטענה אינה נכונה ולכן הטענה כולה נכונה.

במקרה כזה, שבו אנו מוכיחים טענה בסגנון $C \Rightarrow D$ והטענה נכונה שכן C **תמיד** אינה נכונה, אומרים ש-$C \Rightarrow D$ מתקיים "באופן ריק".

ניתן להוכיח את הטענה גם בצורה שונה שפחות מפריעה לאינטואיציה: ברור כי אם $x \notin A$ אז $x \notin \emptyset$ שכן לכל x מתקיים ש-$x \notin \emptyset$, אולם ניסוח זה שקול לחלוטין לניסוח הקודם.

דרך נוספת לראות את ההוכחה: הטענה $\emptyset \subseteq A$ שגויה אם ורק אם קיים $x \in \emptyset$ כך ש-$x \notin A$, אולם מכיוון שלא קיים $x \in \emptyset$ לא ניתן להציג דוגמה נגדית שכזו. ■

משתי הטענות הללו ניתן להסיק:

מסקנה 1.4 קיימת קבוצה ריקה אחת ויחידה. כלומר, אם A, B שתיהן קבוצות ריקות אז $A = B$.

הוכחה: אם A ריקה אז היא תת-קבוצה של כל קבוצה אחרת ובפרט $A \subseteq B$. באותו אופן $B \subseteq A$ ולכן $A = B$. ■

זו דוגמה לשיטת פעולה מקובלת בטקסטים מתמטיים - אחרי הוכחת משפטים "כבדים" יחסית מביאים מסקנות מיידיות שנובעות מהם בקלות.

טענה 1.5 לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$ (**רפלקסיביות** יחס ההכלה).

הוכחה: טריוויאלי. ■

גם זו שיטת הוכחה מקובלת: כאשר הטענה כל כך קלה עד שהקורא יכול להשלים אותה בעצמו ללא כל קושי נוהגים להשמיט את ההוכחה (לעתים ההוכחה שיש להשלים היא לא מיידית כלל ודורשת עבודה מצד הקורא אך לא יותר מדי חשיבה יצירתית).

טענה 1.6 אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$ (**טרנזיטיביות** יחס ההכלה).

אינטואיציה ניתן לקבל באמצעות **דיאגרמת ון** שבה כל קבוצה מצויירת כעיגול ומתקיימים בין העיגולים יחסי ההכלה המתאימים. כאן A היא עיגול שנמצא בתוך העיגול של B שנמצא בתוך העיגול של C ולכן גם אם יימחק העיגול של B עדיין העיגול של A יהיה בתוך העיגול של C. **זו אינה הוכחה.** **הוכחה:** יהי $x \in A$. מכיוון ש-$A \subseteq B$ אז $x \in A$ גורר $x \in B$. מכיוון ש-$B \subseteq C$ אז $x \in B$ גורר $x \in C$. ראינו כי אם $x \in A$ אז $x \in C$, כנדרש. ■

1.5 פעולות על קבוצות

בהינתן קבוצה (או מספר קבוצות), אנו רוצים לעתים קרובות ליצור מהם קבוצות חדשות באופן מסויים. נציג כאן את הבניות הנפוצות ביותר. כל הבניות שנציג מקיימות את התכונה שאם אנו מתחילים עם קבוצה "חוקית" אז גם התוצאה היא קבוצה "חוקית", ולכן בעיות דוגמת זו שהפרדוקס של ראסל הצביע עליהן לא תהיינה רלוונטיות עבורנו.

בכל ההגדרות A, B הן קבוצות כלשהן. נשתמש בסימן $\triangleq$ כדי לומר "מוגדר כ-".

1.5.1 איחוד

הגדרה 1.7 איחוד: $A \cup B \triangleq \{x | x \in A \vee x \in B\}$ (האיחוד של שתי קבוצות כולל את כל האיברים שיש לפחות באחת מהן).

בתורת הקבוצות האקסיומטית משתמשים ב**אקסיומת האיחוד** כדי לבטא את ההנחה שאם A, B הן קבוצות אז הקבוצה $A \cup B$ קיימת.

נציג מספר תכונות בסיסיות של איחוד:

טענה 1.8 איחוד מקיים את התכונות הבאות:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (**אסוציאטיביות** האיחוד).
2. $A \cup B = B \cup A$ (**קומוטטיביות** האיחוד).
3. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
4. $A \cup \emptyset = A$ (הקבוצה הריקה היא **איבר אדיש** ביחס לאיחוד).

הוכחה: כדי לקבל אינטואיציה, נוח לצייר את דיאגרמת ון של כל המקרים.

אסוציאטיביות:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\iff x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \cup C) \\ &\iff x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

בהוכחה זו אנו רואים כי אסוציאטיביות פעולת האיחוד נובעת בסופו של דבר מאסוציאטיביות האופרטור הלוגי $\vee$, שאותה לא הוכחנו.

קומוטטיביות מוכחת באופן דומה לאסוציאטיביות, תוך התבססות על קומוטטיביות $\vee$.

נעבור לתכונה 3. ראשית נניח כי $A \cup B = B$ ונוכיח כי $A \subseteq B$. יהי $a \in A$, אז בפרט $a \in A \cup B = B$, כלומר $a \in B$, כלומר $A \subseteq B$.

כעת נניח כי $A \subseteq B$ ונוכיח כי $A \cup B = B$:

בכיוון אחד, אם $x \in B$ אז בוודאי ש-$(x \in A \vee x \in B)$ ולכן $x \in A \cup B$ (זה נכון תמיד, ללא תלות בתכונה $A \subseteq B$).

בכיוון השני, אם $x \in A \cup B$ אז אחד משניים: או ש-$x \in B$, וזה מה שעלינו להראות, או ש-$x \in A$, ומכך ש-$A \subseteq B$ נובע ש-$x \in B$ ושוב קיבלנו את מה שרצינו להראות.

תכונה 4 נובעת כעת מתכונה 3 ומכך ש-$\emptyset \subseteq A$. ■

1.5.2 חיתוך

הגדרה 1.9 חיתוך: $A \cap B \triangleq \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ (החיתוך של שתי קבוצות כולל את כל האיברים שנמצאים בשתיהן).

התכונות של חיתוך מזכירות את אלו של איחוד:

טענה 1.10 חיתוך מקיים את התכונות הבאות:

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (**אסוציאטיביות** החיתוך).
2. $A \cap B = B \cap A$ (**קומוטטיביות** החיתוך).
3. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$

הוכחה: הוכחת תכונות 1 ו-2 זהה לחלוטין להוכחה עבור איחוד, פרט לכך ש-$\wedge$ תופס את מקום $\vee$ (ואנו מתבססים על האסוציאטיביות והקומוטטיביות של $\wedge$).

עבור תכונה 3 נוכיח את כל אחד מהכיוונים בנפרד. בכיוון הראשון, אם $A \cap B = A$, אז אם $a \in A = A \cap B$ אז $a \in A \wedge a \in B$ ובפרט $a \in B$ ולכן $A \subseteq B$.

בכיוון השני, אם $A \subseteq B$ אז אם $a \in A$ נובע ש-$a \in B$ ולכן $(a \in A \wedge a \in B)$ ולכן $a \in A \cap B$ ולכן $A \subseteq A \cap B$. ההוכחה ש-$A \cap B \subseteq A$ טריוויאלית.

תכונה 4 נובעת כעת מתכונה 3 כי $\emptyset \subseteq A$ לכל A. ■

1.5.3 חיסור ומשלים

הגדרה 1.11 חיסור קבוצות: $A \backslash B \triangleq \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ (החיסור של B מ-A מסיר מ-A את האיברים ששייכים ל-$A \cap B$).

לעתים מסמנים חיסור גם כ-$A - B$ אך מכיוון שלסימון זה שימושים ומשמעויות נוספות נעדיף להשתמש בסימן $A \backslash B$.

לעתים קרובות משתמשים בקבוצות בתוך הקשר ספציפי שבו קיימת קבוצה X שמשמשת כ"עולם הייחוס" וכל שאר הקבוצות שמדברים עליהן הן תת-קבוצות של X. במקרים אלו קיים מושג של "משלים":

הגדרה 1.12 משלים: אם $A \subseteq X$ אז המשלים של A ביחס ל-X מוגדר כ-$\overline{A} \triangleq \{x \in X | x \notin A\} = X \backslash A$ (מסומן לפעמים גם כ-A^c).

שימו לב שמשלים הוא **תמיד** ביחס לקבוצה X שמכילה את A! הגדרה כמו $\{x \notin A\}$ ותו לא תוביל לפרדוקסים.

בטענות הבאות אנו מניחים קיום של קבוצה X שמכילה את A, B ומשלים נלקח ביחס אליה (תמיד ניתן להגדיר $X = A \cup B$ כך שאין בעיה בהנחה זו).

טענה 1.13 $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

הוכחה: אם $x \in A \backslash B$ אז $x \in A \subseteq X$ ולכן $x \in X$ בפרט. כמו כן, $x \notin B$ ולכן בשילוב עם $x \in X$ נקבל ש-$x \in \overline{B}$, ומכאן ש-$A \backslash B \subseteq A \cap \overline{B}$.

בכיוון השני, אם $x \in A \cap \overline{B}$ אז בפרט גם $x \in A$ וגם $x \notin B$, ולכן $x \in A \backslash B$ ולכן $A \cap \overline{B} \subseteq A \backslash B$ כנדרש. ■

הטענה הבאה שימושית במיוחד:

טענה 1.14 (כללי דה-מורגן):

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

הוכחה: כמו אסוציאטיביות וקומוטטיביות של איחוד וחיתוך קבוצות, כך גם כללים אלו נובעים מכללים מקבילים עבור $\wedge$ ו-$\vee$. נוכיח את כלל 1 במפורש; ההוכחה של כלל 2 דומה.

אם $x \in \overline{A \cup B}$ אז $x \in X$ וגם $x \notin A \cup B$. מכאן ש-$x \notin A$ וגם $x \notin B$ (כי אם היה מתקיים $x \in A$ או $x \in B$ היה נובע מכך $x \in A \cup B$). מכך ש-$x \in X$ ו-$x \notin A$ נקבל $x \in \overline{A}$ ובדומה נקבל $x \in \overline{B}$ ולכן $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, ולכן $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

בכיוון השני אם $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ אז $x \notin A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \in X$. משני הראשונים נובע ש-$x \notin A \cup B$ ולכן נקבל ש-$x \in \overline{A \cup B}$ ולכן $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ כנדרש. ■

1.5.4 קבוצת החזקה

ראינו שבהינתן קבוצה A קיימות לה תת-קבוצות (בפרט $\emptyset$ היא תת-קבוצה של כל A). אם כן, יש הגיון בדיבור על **קבוצת** כל תת-הקבוצות של A:

הגדרה 1.15 קבוצת החזקה של A היא הקבוצה $\mathcal{P}(A)=\{B|B\subseteq A\}$.

לעתים קרובות מסמנים את קבוצת החזקה גם בסימון 2^A. אף שסימון זה נראה מבלבל בתחילה יש מאחוריו הגיון שנראה בהמשך, ולאחר מכן אכן נשתמש בסימון זה.

דוגמאות:

- עבור הקבוצה הריקה $\emptyset$ מתקיים $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$, כלומר $\mathcal{P}(\emptyset)$ היא קבוצה שכוללת איבר יחיד: $\emptyset$.
- בדומה, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))=\mathcal{P}(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

1.5.5 זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

עד כה עסקנו בקבוצות חסרות סדר: $\{1,2\}=\{2,1\}$. כמו כן, אותו איבר לא נספר פעמיים: $\{1\}=\{1,1\}$. עם זאת, במקרים רבים במתמטיקה כן חשוב לנו הסדר ואנו כן רוצים שאותו איבר יופיע מספר פעמים. כיצד ניתן לנסח זאת בפורמליזם שכולל קבוצות בלבד? התשובה היא שללא קושי רב.

הגדרה 1.16 זוג סדור (a,b) הוא הקבוצה $(a,b)\triangleq\{\{a\},\{a,b\}\}$.

אין צורך אמיתי לזכור את האופן שבו הגדרנו את הזוג (a,b); מספיק לשים לב לכך שההגדרה עובדת באופן שאנו מצפים ממנה לעבוד:

טענה 1.17 $(a,b)=(x,y)$ אם ורק אם $a=x$ וגם $b=y$.

הוכחה: כיוון אחד של ההוכחה טריוויאלי: אם $a=x$ וגם $b=y$ אז $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{x\},\{x,y\}\}=(x,y)$. עיקר העבודה היא בכיוון השני.

נניח כי $(a,b)=(x,y)$, כלומר $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{x\},\{x,y\}\}$. שתי קבוצות זהות אם יש להן בדיוק את אותם איברים, וכאן יש לנו שתי קבוצות עם שני איברים כל אחת ולכן קורה בדיוק אחד מבין שני מקרים אפשריים:

מקרה 1: במקרה זה, $\{a\}=\{x\}$ ו-$\{a,b\}=\{x,y\}$. מכיוון ש-$\{a\}=\{x\}$ אז בהכרח $a=x$. לכן את השוויון השני ניתן לכתוב כ-$\{x,b\}=\{x,y\}$. כעת, אם $b\neq y$ אז בהכרח $b\neq x$ או $y\neq x$ (או שניהם). נניח כי $b\neq x$, אז b הוא איבר שאינו שייך ל-$\{x,y\}$ שכן הוא שונה משני איבריה - סתירה. לכן $b=y$.

מקרה 2: במקרה זה $\{a\}=\{x,y\}$ ו-$\{a,b\}=\{x\}$. מהשוויון הראשון עולה שבהכרח $a=y=x$ אחרת $\{x,y\}$ היא קבוצה בת שני איברים ובפרט שונה מ-$\{a\}$. לכן השוויון השני הוא למעשה $\{a,b\}=\{a\}$ ולכן מאותו שיקול $b=a=y$. קיבלנו $x=a$ ו-$b=y$ גם במקרה זה. ■

אם A,B הן קבוצות, שימושי מאוד לדבר על אוסף כל הזוגות הסדורים של איבר מ-A ואיבר מ-B:

הגדרה 1.18 המכפלה הקרטזית של A,B היא $A\times B\triangleq\{(a,b)\,|a\in A\wedge b\in B\}$

ניתן להגדיר גם מכפלה בין מספר גדול משתיים של קבוצות, למשל $A\times(B\times C)$, אולם שימו לב שמכפלה זו איננה אסוציאטיבית כי איבר ב-$A\times(B\times C)$ הוא מהצורה $(a,(b,c))$ בעוד שאיבר של $(A\times B)\times C$ הוא מהצורה $((a,b),c)$. לכן נקוט בסימון $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ כדי לתאר את הזוג הסדור $((a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$, ונגדיר $A_1\times\cdots\times A_n\triangleq\{(a_1,\ldots,a_n)\,|\forall i\,(a_i\in A_i)\}$.

בהמשך נראה כיצד ניתן להרחיב את מושג המכפלה הקרטזית כך שיוגדר לכל אוסף של קבוצות (לאו דווקא סופי) באמצעות **פונקציות** (שבתורן מוגדרות בעזרת מכפלות קרטזיות, כך שההגדרה הנוכחית לא הייתה לשווא).

טענה 1.19 התכונות הבאות של מכפלה קרטזית מתקיימות:

1. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ (הקבוצה הריקה מתנהגת כמו אפס ביחס לפעולת הכפל).
2. אם $A \times B = \emptyset$ אז $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$ (אין **מחלקי אפס**).
3. אם $A \subseteq B$ אז לכל C, $A \times C \subseteq B \times C$ (**מונוטוניות**).
4. $(A \odot B) \times C = A \times C \odot B \times C$ עבור $\odot \in \{\cup, \cap, \setminus\}$ (**דיסטריביוטיביות**).

הוכחה: טענה 1 נובעת מההגדרה: מכיוון ש-$b \notin \emptyset$ לכל b, הרי שהתנאי $a \in A \wedge b \in B$ אינו יכול להתקיים אף פעם ולכן $A \times \emptyset$ ריקה, ובדומה גם $\emptyset \times A$.

טענה 2 נובעת מכך שאם $A \neq \emptyset$ אז קיים $a \in A$. בדומה, אם $B \neq \emptyset$ אז קיים $b \in B$, ולכן $(a,b) \in A \times B$ ולכן $A \times B \neq \emptyset$. הראינו ש-$\neg(A = \emptyset \vee B = \emptyset) \Leftarrow \neg(A \times B = \emptyset)$, וזה שקול לוגית למה שרצינו להראות.

עבור טענה 3, ניקח $(a,c) \in A \times C$, אז בפרט $a \in A, c \in C$ ומכיוון ש-$A \subseteq B$ נקבל $a \in B$ ולכן $(a,c) \in B \times C$ כנדרש.

נוכיח את טענה 4 עבור $\odot = \cup$; שאר ההוכחות דומות. במקרה זה:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C &\iff (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) \\
&\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\
&\iff (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C \\
&\iff (x,y) \in A \times C \cup B \times C
\end{aligned}$$

כאן הסתמכנו על דיסטריביוטיביות $\vee$ מעל $\wedge$, שאותה ניתן להוכיח באמצעות טבלת אמת. ■

1.6 איחודים וחיתוכים כלליים

הגדרנו איחוד וחיתוך עבור זוג קבוצות. ניתן להשתמש בהגדרה זו כדי לקבל איחוד וחיתוך של מספר סופי של קבוצות, אולם אין קושי להכליל את ההגדרה אף יותר מכך.

נסמן ב-$\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות (לעתים קבוצה כזו נקראת **משפחה** כדי להדגיש שמדובר על אוסף של קבוצות ולא של איברים שרירותיים).

הגדרה 1.20 (איחוד וחיתוך כלליים):
לכל $\mathcal{F} \neq \emptyset$ נגדיר:

- $\bigcup \mathcal{F} \triangleq \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \triangleq \{a | \exists A \in F \, (a \in A)\}$
- $\bigcap \mathcal{F} \triangleq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \triangleq \{a | \forall A \in F \, (a \in A)\}$

אם היינו מרשים שיתקיים $\mathcal{F} = \emptyset$ אז $\bigcap \mathcal{F}$ היה סימון חסר משמעות; מכיוון שאם $\mathcal{F} = \emptyset$ אז התנאי $\forall A \in F \, (a \in A)$ מתקיים באופן ריק בלי תלות ב-a אז $\bigcap \mathcal{F}$ הייתה על פי הגדרה זו פשוט הקבוצה האוניברסלית וראינו כבר בפרדוקס של ראסל (1.2) כי קבוצה זו אינה יכולה להתקיים.

לעתים קרובות במקום הסימון $A \in \mathcal{F}$ משתמשים בסימונים אחרים. נציג כאן דוגמה.

הגדרה 1.21 תהא $A_1, A_2, A_3, \ldots$ סדרה של קבוצות.

- **הגבול העליון** של הסדרה מוגדר בתור $\limsup A_n \triangleq \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.
- **הגבול התחתון** של הסדרה מוגדר בתור $\liminf A_n \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$.

אינטואיטיבית, גבול עליון הוא "קבוצת כל האיברים ששייכים לאינסוף קבוצות בסדרה" וגבול תחתון הוא "קבוצת כל האיברים ששייכים לכל אברי הסדרה החל ממקום מסוים". דוגמה זו ממחישה את סגנון הכתיבה $\bigcup_{n=0}^{\infty}$ כאשר קיים מספור של אברי $\mathcal{F}$.

1.7 בניית המספרים הטבעיים

קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ היא אחת הקבוצות השימושיות ביותר עבורנו. בשל כך, נציג כעת דרך פורמלית לבנות את איבריה, שגם תסייע לנו בהבנת סימונים והגדרות בהמשך.

נניח כי לא ידוע לנו כלל על קיומם של מספרים, ועלינו לבנות את $\mathbb{N}$ רק מתוך "אבני הבניין" שפיתחנו עד כה במסגרת תורת הקבוצות. הקבוצה הפשוטה ביותר שראינו (והנחנו את קיומה) היא הקבוצה הריקה $\emptyset$. נגדיר אם כך $0 \triangleq \emptyset$.

את 1 נוכל להגדיר כעת בתור $\{\emptyset\}$, כלומר קבוצה שמכילה את הקבוצה הריקה. את 2 ניתן להגדיר בתור $\{\{\emptyset\}\}$, וכן הלאה; אך גישה זו מועילה פחות מהגישה שנציג.

נניח שהגדרנו עד כה את כל המספרים עד n בתור קבוצות (בהתחלה $n = 0$). אז נגדיר את $n + 1$ להיות $n + 1 \triangleq n \cup \{n\}$.
כלומר, $n + 1$ הוא הקבוצה שמכילה את כל אברי n ובנוסף לכך את n עצמו כאיבר חדש.

באופן זה נקבל:

- $0 = \emptyset$
- $1 = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

ובאופן כללי נקבל $n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. בשיטה זו, הקבוצה שמייצגת את n מכילה בדיוק n איברים, שהם בדיוק n המספרים הטבעיים שקודמים ל-n.

לבניה זו קיימת הכללה מרחיקת לכת שנציג בפרק 4 כאשר נדבר על סודרים.

2 יחסים

2.1 מבוא והגדרות כלליות

נתחיל מהתבוננות במספר דוגמאות והבנת המשותף לכולן:

1. $1 = 1$
2. $e < \pi$
3. $A \subseteq B$
4. בגרף G קיים מסלול בין הצמתים u ו-v
5. 3 מחלק את 15
6. $\cos(0) = 1$

בכל הדוגמאות הללו יש לנו שני איברים שנלקחים מאותו תחום (שני מספרים, שתי קבוצות, שני צמתים בגרף) ובכל דוגמה מתקיים קשר מסויים ביניהם. במתמטיקה משתמשים במילה **יחס** (Relation) כדי לתאר קשר שכזה. בדוגמה 1 היחס הוא "שווה"; בדוגמה 2 הוא "קטן מ-"; בדוגמה 3 הוא "מוכל"; בדוגמה 4 הוא "קיים מסלול בין"; בדוגמה 5 הוא "מחלק" ובדוגמה 6 הוא "ה-cos של... שווה ל...".

אף שמבחינה אינטואטיבית הרעיון ברור, לא לחלוטין ברור איך לפרמל אותו. למשל, את היחס $A \subseteq B$ מבטאים באמצעות הנוסחה "$x \in A \Leftarrow x \in B$" ואילו את היחס "$x$ מחלק את y" מבטאים באמצעות הנוסחה $\exists z: xz = y$" שנראית שונה למדי, וכן הלאה. למרות שיש עניין בשאלה איך ניתן **לתאר** את היחס, אפשר לחמוק ממנה כעת באמצעות הגדרה רחבה:

הגדרה 2.1 **יחס** n-מקומי R על הקבוצות $A_1, \ldots, A_n$ הוא תת-קבוצה $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$.

בפרט, יחס דו-מקומי (בינארי) R על הקבוצות A, B הוא תת-קבוצה $R \subseteq A \times B$ ויחס חד-מקומי (אונרי) R על הקבוצה A הוא פשוט תת-קבוצה $R \subseteq A$.

כלומר, יחס R על A, B הוא פשוט זוגות (a, b) של איבר מ-A ואיבר מ-B. אוסף הזוגות הזה הוא שמתאר את היחס: אם $(a, b) \in R$ אז אומרים ש-a, b נמצאים ביחס R ולעתים קרובות מסמנים זאת aRb. אם $(a, b) \notin R$ אז אומרים ש-a, b אינם נמצאים ביחס R.

דוגמאות

1. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר על ידי $R = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ - זהו יחס השוויון על המספרים הטבעיים. במקום לכתוב aRa נהוג לכתוב $a = a$.
2. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר על ידי $R = \left\{(1, 2), (4, 1), \left(10^{100}, 10^{101}\right)\right\}$ הוא יחס שכולל בדיוק שלושה זוגות, ואין שום חוקיות ברורה שעומדת מאחוריו. דוגמה זו באה להמחיש את העובדה שניתן לדבר על יחס גם בלי לתת "כלל" שמגדיר אותו.
3. $R \subseteq A \times B$ המוגדר על ידי $R = \emptyset$ הוא יחס חוקי לכל דבר, אם כי טריוויאלי; ביחס זה, aRb אינו נכון לאף a, b.
4. $R = A \times B$ גם הוא יחס חוקי לכל דבר, אם כי טריוויאלי: ביחס זה aRb נכון **לכל** a, b.
5. $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדר על ידי $R = \{(x, y) \mid \exists r > 0 : (x + r = y)\}$. זהו היחס $<$ ב"תחפושת" - מכאן אנו רואים שניתן להגדיר את אותו היחס במספר דרכים שונות.

יחסים דו-מקומיים ניתן **להרכיב**, באופן הבא:

הגדרה 2.2 אם $R \subseteq A \times B$ ו-$S \subseteq B \times C$ הם יחסים, אז נגדיר יחס $R \circ S \subseteq A \times C$ הנקרא **ההרכבה** של R על S באופן הבא:

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

טענה 2.3 הרכבת יחסים היא פעולה אסוציאטיבית. כלומר, אם $R_1 \subseteq A_1 \times A_2$, $R_2 \subseteq A_2 \times A_3$ ו-$R_3 \subseteq A_3 \times A_4$ אז $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

הוכחה: נניח כי $(a_1, a_4) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$, אז קיים $a_2 \in A_2$ כך ש-$a_1R_1a_2$ וגם $a_2\,(R_2 \circ R_3)\,a_4$. כלומר, קיים $a_3 \in A_3$ כך ש-$a_2R_2a_3$ וגם $a_3R_3a_4$.

כעת, מכך ש-$a_1R_1a_2$ וגם $a_2R_2a_3$ נסיק כי $a_1\,(R_1 \circ R_2)\,a_3$; ומכך ש-$a_3R_3a_4$ נסיק ש-$(a_1, a_4) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. על כן $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. ההוכחה לכיוון השני דומה. ■

במקרה שבו היחס הוא בין קבוצה לעצמה, ניתן להרכיב יחס עם עצמו:

הגדרה 2.4 בהינתן יחס $R \subseteq A \times A$, נגדיר: $R^0 = \{(a, a)\,|a \in A\}$ ולכל $n > 0$ טבעי, $R^n = R \circ R^{n-1}$.
בנוסף נגדיר $R^+ \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. ל-$R^+$ קוראים **הסגור הטרנזיטיבי** של R. כמו כן נגדיר $R^* \triangleq \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ - **הסגור הרפלקסיבי-טרנזיטיבי** של R.

יחסים דו-מקומיים ניתן גם להפוך:

הגדרה 2.5 יהא $R \subseteq A \times B$ יחס. נגדיר את **היחס ההפוך** $R^{-1} \subseteq B \times A$ באופן הבא: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

2.2 יחסי שקילות

2.2.1 הגדרה ודוגמאות

במקרים רבים במתמטיקה ישנם שני אובייקטים שאינם זהים זה לזה, אך בתכונות המהותיות שלהן שרלוונטיות עבורנו כן קיימת זהות. במקרים אלו היינו רוצים להחשיב את האיברים כ"שקולים זה לזה". הדרך הפורמלית לעשות כן היא באמצעות יחסי שקילות. לצורך הגדרת יחסי שקילות נזהה את התכונות המהותיות של יחס השוויון, שהוא האב טיפוס שלנו בבואנו להגדיר יחסי שקילות.

1. כל איבר a מקיים תמיד $a = a$. זהו אולי הרעיון הבסיסי בשוויון - כל איבר שווה לעצמו.
2. אם יש לנו משוואה $a = b$, אז בוודאי שגם המשוואה $b = a$ נכונה - המושג של שוויון אינו מושפע מהסדר (בניגוד חריף ליחסים כמו $a < b$).
3. אם $a = b$ וגם $b = c$ אז נובע מכך ש-$a = c$.

שלוש התכונות הללו הן הבסיס להגדרה הכללית של יחס שקילות:

הגדרה 2.6 יחס דו-מקומי $R \subseteq A \times A$ הוא **יחס שקילות** על הקבוצה A אם הוא מקיים:

1. לכל $a \in A$ מתקיים aRa (**רפלקסיביות**).
2. $aRb \iff bRa$ (**סימטריה**).
3. אם aRb וגם bRc אז aRc (**טרנזיטיביות**).

דוגמאות

1. כצפוי, יחס השוויון הוא יחס שקילות. זהו יחס השקילות הקטן ביותר האפשרי, במובן זה שכל יחס שקילות אחר על אותה קבוצה מכיל אותו.
2. גם היחס $R = A \times A$ שבו כל זוג איברים הם שקולים הוא יחס שקילות. זהו יחס השקילות הגדול ביותר האפשרי על A.
3. אם A היא קבוצת המשולשים בגאומטריה אוקלידית, אז $R = \{(\Delta_1, \Delta_2)\,|\Delta_2$ בעל אותן זוויות כמו $\Delta_1\}$ הוא יחס השקילות של **דמיון משולשים**.
4. אם $G = (V, E)$ הוא גרף לא מכוון, אז $R \subseteq V \times V$ שמוגדר על ידי $\{(u, v) \mid$ קיים מסלול מ-u אל v ב-$G\} = V$ הוא יחס שקילות.
5. אם A היא קבוצת כל האנשים בעולם, אפשר להגדיר יחסי שקילות רבים ושונים: אנשים הם שקולים אם יש להם אותו צבע שיער, או אותו מין, או שהם חיים באותה מדינה, וכן הלאה.
6. עבור הקבוצה $M_n(\mathbb{R})$ של מטריצות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$, היחס $R = \left\{(A, B)\,|\exists P \in M_n(\mathbb{R}) : P^{-1}AP = B\right\}$ הוא יחס שקילות של **דמיון מטריצות**.

נראה בהמשך דוגמאות מהותיות אף יותר, אך קודם נבין יותר לעומק את המבנה שיחס שקילות R משרה על הקבוצה A.

2.2.2 קבוצת המנה

הגדרה 2.7 תהא A קבוצה ו-$R \subseteq A \times A$ יחס שקילות על A. לכל $a \in A$ נגדיר את **מחלקת השקילות** של a ביחס ל-R: $[a]_R \triangleq \{b \in A | aRb\}$

מחלקת השקילות של a היא פשוט אוסף האיברים ששקולים ל-a ביחס השקילות R. לרוב נשמיט את ה-R מהסימון $[a]_R$ כשיהיה ברור על איזה יחס שקילות מדובר.

לכל זוג איברים a, b הקשר בין $[a]$, $[b]$ הוא פשוט במיוחד:

טענה 2.8 תהא A קבוצה ו-R יחס שקילות עליה ו-$a, b \in A$ כלשהם. אז:

- אם aRb אז $[a] = [b]$.
- אם לא aRb אז $[a] \cap [b] = \emptyset$

הוכחה: ראשית נניח כי aRb ונוכיח כי $[a] = [b]$. ראשית נוכיח כי aRb גורר $[b] \supseteq [a]$. יהי $c \in [b]$, אז על פי הגדרה bRc. כמו כן, aRb על פי הנחתנו ומטרנזיטיביות R נקבל aRc, כלומר $c \in [a]$, ולכן $[b] \supseteq [a]$, כנדרש. בכיוון השני, מכיוון ש-R סימטרי ו-aRb הרי ש-bRa ולכן ניתן לחזור על ההוכחה שראינו ולקבל $[b] \subseteq [a]$. מכאן ש-$[b] = [a]$, כנדרש.

עבור המקרה השני, נוכיח כי אם $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ אז aRb. יהי $c \in [a] \cap [b]$, כלומר $c \in [a] \wedge c \in [b]$, כלומר $aRc \wedge bRc$. מסימטריית R נקבל cRb, ומטרנזיטיביות R נקבל כעת aRb. ■

מכאן אנו למדים שניתן לתאר מחלקת שקילות בתור $[a]$ **לכל** איבר a של מחלקת השקילות הזו. כאשר אנו משתמשים ב-a לצורך זה, אז a נקרא **נציג** של מחלקת השקילות.

הגדרה 2.9 תהא X קבוצה. משפחה $\mathcal{F}$ של קבוצות היא **חלוקה** של X אם מתקיים:

1. $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = X$
2. לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $A \neq \emptyset$
3. לכל זוג $A, B \in \mathcal{F}$ כך ש-$A \neq B$ מתקיים $A \cap B = \emptyset$

במילים, חלוקה של X היא משפחת קבוצות לא ריקות, זרות בזוגות, שאיחודן הוא בדיוק X. בחלוקה כל איבר של X שייך **בדיוק לאחת** מבין הקבוצות בחלוקה, ואין קבוצות "מיותרות" (ריקות).

כעת אנו מגיעים להגדרה המרכזית, שבזכותה יחסי שקילות הם כל כך חשובים:

הגדרה 2.10 תהא A קבוצה ו-R יחס שקילות על A. אז נגדיר את **קבוצת המנה** של A ביחס ל-R באופן הבא:

$$A/R \quad \triangleq \quad \{[a] \,| a \in A\}$$

כלומר, קבוצת המנה של A היא קבוצת **מחלקות השקילות** של אברי A ביחס ל-R.

טענה 2.11 אם A קבוצה ו-R יחס שקילות על A, אז A/R היא חלוקה של A.

הוכחה: מכיוון ש-R רפלקסיבי אז לכל $a \in A$ מתקיים aRa ולכן $a \in [a]$. מכאן ש-$a \in \bigcup_{b \in A} [b]$ שכן בפרט $[a]$ משתתף באיחוד (תכונה 1). כמו כן, זה מראה כי כל אברי A/R הם לא ריקים שכן אם $[a]$ הוא איבר כלשהו של A/R, הוא מכיל את a (תכונה 2). עבור תכונה 3, תהיינה $[a]$, $[b]$ שתי מחלקות שקילות ב-A/R (לא בהכרח שונות). אם aRb אז $[a] = [b]$, ואם לא aRb אז $[a] \cap [b] = \emptyset$, כנדרש. ■

הראינו שכל יחס שקילות מעל A משרה חלוקה על A. גם הכיוון ההפוך נכון - כל חלוקה של A מגדירה יחס שקילות, והחלוקה שמושרית על ידי יחס השקילות הזה היא זו שממנה התחלנו:

טענה 2.12 אם A קבוצה ו-$\mathcal{F}$ היא חלוקה שלה אז היחס $R_{\mathcal{F}} = \{(a,b) \mid \exists B \in \mathcal{F} : (a \in B \wedge b \in B)\}$ הוא יחס שקילות ומתקיים $A/R_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

הוכחה: נוכיח כי $R_{\mathcal{F}}$ הוא יחס שקילות. עבור רפלקסיביות, יהא $a\in A$ כלשהו אז על פי הגדרת חלוקה, $a\in\bigcup_{B\in\mathcal{F}}B$, כלומר קיים $B\in\mathcal{F}$ כך ש-$a\in B$ ולכן על פי הגדרה $(a,a)\in R_{\mathcal{F}}$.

עבור סימטריה יהיו $a,b\in A$ כלשהם כך ש-$(a,b)\in R_{\mathcal{F}}$, אז קיימת $B\in\mathcal{F}$ כך ש-$a\in B\wedge b\in B$ ומהקומוטטיביות של $\wedge$ נקבל ש-$b\in B\wedge a\in B$, כלומר $(b,a)\in R_{\mathcal{F}}$.

עבור טרנזיטיביות, יהיו $a,b,c\in A$ כך ש-$(a,b)\in R_{\mathcal{F}}$ וגם $(b,c)\in R_{\mathcal{F}}$. כלומר, קיימות קבוצות B,B' כך ש-$a\in B\wedge b\in B$ וגם $b\in B'\wedge c\in B'$. בפרט $b\in B\cap B'$, כלומר $B\cap B'\neq\emptyset$. על פי הגדרת חלוקה, נובע מכך ש-$B=B'$ ולכן מתקיים $a\in B\wedge c\in B$, כלומר $(a,c)\in R_{\mathcal{F}}$.

משלושת אלו קיבלנו כי $R_{\mathcal{F}}$ הוא יחס שקילות. נותר להראות כי $A/R_{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$. שימו לב כי עד כה בהוכחה לא השתמשנו בתכונה 2 של הגדרת חלוקה: גם אם לא הייתה מתקיימת תכונה זו עדיין היינו מקבלים יחס שקילות, אבל לא היינו מסוגלים "לקבל בחזרה" את החלוקה שממנה התחלנו כי הקבוצה הריקה לא הייתה מופיעה ב-$A/R_{\mathcal{F}}$.

■

נחזור אל מקצת הדוגמאות שראינו ונבין כיצד קבוצת המנה באה לידי ביטוי במקרים אלו:

1. עבור יחס השוויון, $[a]=\{a\}$, ולכן נקבל $A/R=\{\{a\}\,|a\in A\}$ לכל A. זוהי החלוקה ה"עדינה ביותר" האפשרית של A.
2. עבור היחס $R=A\times A$ קיימת בדיוק מחלקת שקילות אחת, כלומר $A/R=A$. זוהי החלוקה ה"גסה ביותר" האפשרית של A.
3. עבור יחס השקילות שהגדרנו על גרף $G=(V,E)$ בו זוג צמתים היו שקולים אם היה מסלול ביניהם, הרי ש-V/R היא קבוצת **רכיבי הקשירות** של G.
4. עבור מטריצות ויחס הדמיון, מחלקות השקילות שנקבל הן **מחלקות הצמידות** של המטריצות; כשהמטריצות הן מעל שדה סגור אלגברית ניתן לתאר כל מחלקה על ידי נציג **קנוני** שהוא מטריצה ב**צורת ז'ורדן**.

כעת אנו רוצים לתת משמעות מתמטית מדויקת לתחושה שיחס השקילות שבו כל האיברים שקולים זה לזה הוא "גס" בעוד שיחס השקילות שבו כל איבר שקול רק לעצמו הוא "מעודן" יותר. לצורך כך נזדקק להגדרה:

הגדרה 2.13 תהיינה X קבוצה ו-$\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ חלוקות של X. נאמר ש-$\mathcal{F}_1$ **מעדנת** את $\mathcal{F}_2$ ונסמן זאת $\mathcal{F}_1\preceq\mathcal{F}_2$ אם לכל $A_1\in\mathcal{F}_1$ קיימת $A_2\in\mathcal{F}_2$ כך ש-$A_1\subseteq A_2$.

במילים אחרות $\mathcal{F}_1$ מעדנת את $\mathcal{F}_2$ אם אפשר לחשוב על $\mathcal{F}_1$ כמתקבלת מ-$\mathcal{F}_2$ על ידי ביצוע חלוקה של כל אחת מהקבוצות ב-$\mathcal{F}_2$ עצמה.

משפט 2.14 תהא A קבוצה ויהיו R_1,R_2 יחסי שקילות על A. אז מתקיימת התכונה ש-$xR_1y\Rightarrow xR_2y$ אם ורק אם A/R_1 מעדנת את A/R_2.

הוכחה: ראשית נניח כי $xR_1y\Rightarrow xR_2y$ ונוכיח כי A/R_1 מעדנת את A/R_2. תהא $B_1\in A/R_1$ ונרצה למצוא $B_2\in A/R_2$ כך ש-$B_1\subseteq B_2$. מכיוון ש-A/R_1 חלוקה, B_1 לא ריקה ולכן קיים $x\in B_1$. נגדיר $B_2=[x]_{R_2}$. כעת, יהא $y\in B_1$ כלשהו, אז על פי הגדרה xR_1y, ולכן xR_2y ולכן $y\in B_2$. מכאן ש-$B_1\subseteq B_2$ כנדרש.

כעת נניח כי A/R_1 מעדנת את A/R_2 ונוכיח כי $xR_1y\Rightarrow xR_2y$. יהיו אם כן $x,y\in A$ כך ש-xR_1y. נגדיר $B_1=[x]$. מכיוון ש-$B_1\in A/R_1$ אז קיימת $B_2\in A/R_2$ כך ש-$B_1\subseteq B_2$. מכיוון ש-xR_1y אז $y\in[x]=B_1\subseteq B_2$ ולכן $y\in B_2$. בדומה, $x\in[x]=B_1\subseteq B_2$ ולכן $x\in B_2$. מכיוון ש-$B_2\in A/R_2$ אז על פי הגדרה $B_2=[a]_{R_2}$ עבור $a\in A$ כלשהו, ובפרט aR_2x ו-aR_2y ומסימטריה וטרנזיטיביות R_2 נסיק xR_2y כנדרש. ■

2.2.3 דוגמאות נוספות

בניית המספרים השלמים והרציונליים: נגדיר על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ את יחס השקילות הבא: $R=\{((a,b),(x,y))\,|a+y=b+x\}$, ונסמן $\mathbb{Z}\triangleq\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R$.

האינטואיציה שלנו היא לחשוב על הזוג (a,b) בתור המספר השלם $a-b$, ולכן שני זוגות (a,b) ו-(x,y) מייצגים את אותו מספר אם $a-b=x-y$, כלומר $a+y=b+x$.

את מחלקות השקילות אפשר לתאר באופן הבא בעזרת נציגים קנוניים:

$\mathbb{Z}=\bigcup_{a\in\mathbb{N}}[(a,0)]\cup\bigcup_{a\in\mathbb{N}}[(0,a)]$

הרכיב השמאלי מתאר לנו את הטבעיים, והרכיב הימני את השליליים (יחד עם אפס). כדי לראות שאכן כל (a,b) שקול לנציג מאחת מהקבוצות, נפריד לשני מקרים:

- אם $a \geq b$ אז $(a,b)\,R\,(a-b,0)$
- אם $a<b$ אז $(a,b)\,R\,(0,b-a)$

בניית הרציונליים מתבצעת באופן דומה באמצעות זוגות של שלמים. האינטואיציה כעת היא שזוג (a,b) עם $b\neq 0$ ייצג את $\frac{a}{b}$, ולכן אם $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ מתקיים $ay=bx$.

פורמלית, נגדיר על $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ את יחס השקילות $R=\{((a,b),(x,y))\,|ay=bx\}$, ונסמן $\mathbb{Q}\triangleq\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\backslash\{0\})/R$.

כדי לתאר את $\mathbb{Q}$ באמצעות נציגים קנוניים, יש להשתמש במושג מתורת המספרים האלמנטרית: $a,b\in\mathbb{Z}$ הם **זרים** אם לא קיים להם מחלק משותף הגדול מ-1. נסמן זאת $\gcd(a,b)=1$.

כעת: $\mathbb{Q}=\bigcup\{[(a,b)]\mid \gcd(a,b)=1\wedge a,b\neq 0\}\cup[(0,1)]$.

הבניה לא שלמה שכן לא הגדרנו את פעולות החשבון על $\mathbb{Q}$, אך זה כבר עניין לספר העוסק בתורת החוגים.

בניית $\mathbb{Z}_n$: נשים לב כי החלוקה למספרים זוגיים ואי-זוגיים של $\mathbb{Z}$ משרה, כפי שראינו עבור כל חלוקה, יחס שקילות. האם קיים לו תיאור פשוט? היחס המתבקש הוא $R=\{(a,b)\,|a \bmod 2=b \bmod 2\}$ כאשר mod היא הפעולה של חלוקה ולקיחת השארית, אך קיים תיאור פשוט יותר: $R=\{(a,b)\,|2|a-b\}$, כאשר $x|y$ פירושו "x מחלק את y", כלומר קיים $z\in\mathbb{Z}$ כך ש-$xz=y$.

ניתן לבצע בניה זו גם באופן כללי: בהינתן $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, נגדיר יחס שקילות $\equiv_n$ על $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $a\equiv_n b$ אם ורק אם $n|a-b$. נוכיח כי זה אכן יחס שקילות:

1. רפלקסיביות: לכל $a\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a-a=0=0\cdot n$ ולכן $n|a-a$ ולכן $a\equiv_n a$.
2. סימטריה: אם עבור $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a\equiv_n b$, פירוש הדבר ש-$a-b=z\cdot n$, ולכן $b-a=(-z)\cdot n$ ולכן $b\equiv_n a$.
3. טרנזיטיביות: אם עבור $a,b,c\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a\equiv_n b$ וגם $b\equiv_n c$ אז קיימים z_1,z_2 כך ש-$a-b=z_1n$ ו-$b-c=z_2n$. מכאן ש-

$$\begin{aligned} a-c &= (a-b)+(b-c) \\ &= z_1n+z_2n=(z_1+z_2)\,n \end{aligned}$$

ולכן $a\equiv_n c$

נסמן $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/R$. נשים לב לכך ש-$\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],\dots,[n-1]\}$. כדי לראות זאת, יהי $a\in\mathbb{Z}$ כלשהו ו-$r=a \bmod n$, כלומר קיים $q\in\mathbb{Z}$ כך ש-$a=q\cdot n+r$, כלומר $a-r=q\cdot n$, כלומר $a\equiv_n r$. מכיוון ש-r הוא השארית בחלוקה ב-n, הוא תמיד בתחום $\{0,1,\dots,n-1\}$.

הבניה לא שלמה שכן לא הגדרנו את פעולות החשבון על $\mathbb{Z}_n$, אך גם זה כבר עניין לספר בתורת החוגים.

בניות טופולוגיות: בטופולוגיה נהוג לבנות **מרחבי מנה** על ידי "הדבקה" של חלקים מהמרחב יחד. באופן פורמלי הדבר מתבצע על ידי הגדרת יחס שקילות שמזהה את הנקודות שהודבקו יחד.

נציג כאן דוגמה פשוטה בלבד: נתבונן בקטע $A=[0,1]$ ו"נדביק" את שני קצותיו יחד על ידי הגדרת יחס שקילות $R=\{(a,a)\,|a\in[0,1]\}\cup\{(0,1)\}$. על קבוצת המנה שמתקבלת A/R ניתן לחשוב כעל מעגל.

ניתן לקבל מעגל גם כתוצאה של בניה מחוכמת יותר. נגדיר יחס שקילות על כל $\mathbb{R}$: $R\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך ש-$R=\{(a,b)\,|a-b\in\mathbb{Z}\}$. לא קשה לראות כי a,b שקולים אם ורק אם החלק השברי שלהם (כל מה שמימין לנקודה העשרונית) שווה. גם במקרה זה ניתן לחשוב על $\mathbb{R}/R$ (שמסומן לעתים $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) כמעגל; באופן ציורי, ניתן לחשוב על הבניה כאילו היא לוקחת את הישר האינסופי $\mathbb{R}$ ומלפפת אותו במעגל היחידה אינסוף פעמים (עוד דרך לחשוב על הבניה: $\mathbb{R}$ יוצר "ספירלה" בצורת בורג שלאחר מכן משוטחת)

2.3 פונקציות

2.3.1 הגדרה ודוגמאות

אינטואיטיבית, ניתן לחשוב על פונקציה כמעין "מכונה" או "כלל" שמתרגמים **קלט** ל**פלט**, כלומר מבצעים תהליך שממיר ערך x לערך אחר y. הדרך הטבעית לתאר פונקציה היא על ידי תיאור הכלל או התהליך הזה, אבל כמו במקרה הכללי של יחסים, גם כאן אנחנו מעדיפים גישה כללית יותר שמתמקדת בתכונות הבסיסיות שצריכות להתקיים ולא בדרך ההגדרה של הפונקציה.

הגדרה 2.15 פונקציה $f:A\to B$ היא יחס דו-מקומי $f\subseteq A\times B$ המקיים:

- (קיום) לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ כך ש-$(x,y)\in f$.
- (יחידות) לכל $x\in A$ ו-$y_1,y_2\in B$, אם $(x,y_1)\in f$ וגם $(x,y_2)\in f$ אז $y_1=y_2$.

במילים: **לכל** $x\in A$ קיים $y\in B$ **יחיד** כך ש-$(x,y)\in f$.
הקבוצה A נקראת **התחום** של הפונקציה והקבוצה B נקראת **הטווח** של הפונקציה.

אם f היא פונקציה נהוג להשתמש בסימון $f(x)=y$ במקום $(x,y)\in f$.
התחום והטווח של פונקציה הם חלק אינטגרלי מהגדרתה; שתי פונקציות שמכילות בדיוק אותם זוגות אך התחום או הטווח שלהן מוגדרים באופן שונה הן פונקציות שונות (ליתר דיוק, התחום שלהן חייב להיות זהה או שבלתי אפשרי שהן יכילו את אותם זוגות; אך הטווחים יכולים להיות שונים).
נציג מספר דוגמאות לפונקציות פשוטות:

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x$ - פונקציית הזהות על $\mathbb{R}$.
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ - העלאה בריבוע. נשים לב לכך שגם $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ המוגדרת על ידי $g(x)=x^2$ היא פונקציית "העלאה בריבוע של מספר ממשי" אך היא איננה זהה ל-f מכיוון שהטווח שלהן שונה, וזאת למרות ש-f אינה "משתמשת" בטווח הנוסף שיש לה כי איננה מחזירה מספר שלילי (בכל מובן אחר f ו-g זהות).
- $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ המוגדרת על ידי $f(x)=\sqrt{x}$ - הפונקציה המחזירה לכל מספר שלם אי שלילי את השורש החיובי שלו. במקרה זה תחום הפונקציה אינו יכול לכלול מספרים שליליים שכן השורש שלהם איננו מספר ממשי.
- $f:A\to 2^A$ המוגדרת על ידי $f(a)=\{a\}$ - הפונקציה שמעבירה כל איבר ב-A לקבוצה שמכילה רק אותו.
- $f:2^A\times 2^A\to 2^A$ המוגדרת על ידי $f((B,C))=B\cup C$ - פונקציה זו מקבלת זוג סדור של שתי תת-קבוצות של A ומחזירה את איחודן.
- $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי $f((x,y,z))=\left(x^2+z^2,13,y^3,x-y+17\right)$ - פונקציה זו ממחישה כי ניתן לתאר פונקציות מרובות משתנים (ועם פלט מרובה משתנים) גם בעזרת הניסוח ה"מצומצם" שלנו שהסתפק בקבוצה אחת לתחום וקבוצה אחת לטווח. לרוב במקום $f((x,y,z))$ כותבים לצורך פשטות $f(x,y,z)$.

אם $f:A\to B$ היא פונקציה, אז אפשר "לצמצם" אותה על כל תת-קבוצה של A ועדיין לקבל פונקציה:

הגדרה 2.16 תהא $f:A\to B$ פונקציה ו-$D\subseteq A$.
f **מצומצמת** ל-D, שמסומנת כ-$f|_D$, היא הפונקציה $f|_D\triangleq\{(a,b)\in f\mid a\in D\}$.

יש צורך להוכיח כי $f|_D$ היא אכן פונקציה, אך הדבר קל: כל $a\in D$ הוא בפרט $a\in A$ ולכן קיים b יחיד כך ש-$(a,b)\in f$, ולכן $(a,b)\in f|_D$.
כעת ניתן מספר דוגמאות לנסיונות להגדיר פונקציה באמצעות כלל, שבגלל בעיה בהגדרה אינן מובילות לפונקציה. יש שני דברים עיקריים שיכולים להשתבש: או שהכלל המוצע לא יהיה בעל משמעות עבור כל אברי A, או שיהיו איברים ב-A עבורם הכלל מחזיר יותר מפלט אפשרי אחד. עבור "פונקציות" שהוגדרו באמצעות כלל בעייתי שכזה אומרים שהן אינן **מוגדרות היטב**.

1. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות הכלל $f(x)=\frac{1}{x}$ אינה מוגדרת ב-$x=0$ שכן אין משמעות לחלוקה באפס.
2. הפונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות הכלל $f(x)=\pm\sqrt{x}$ מחזירה יותר מערך אחד לכל x בתחום (גם $\sqrt{x}$ וגם $-\sqrt{x}$)
3. הפונקציה $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}$ המוגדרת באמצעות הכלל $f([a])=a$ מחזירה יותר מערך אחד לכל מחלקת שקילות, כתלות בנציג שאנו בוחרים למחלקת השקילות. למשל, $f([0])=0$ ו-$f([n])=n$ על פי הגדרה זו, אך $[n]=[0]$.

את בעיות 1 ו-2 ניתן לתקן על ידי שינויים לא מהותיים בהגדרות. את המקרה שבו פונקציה $f:A\to B$ אינה מוגדרת על ערכים מסויימים של A ניתן לתקן בשתי דרכים שונות: או להקטין את התחום של f לתת-קבוצה של A שעליה f מוגדרת, או להרחיב את הטווח B על ידי הוספת סימון מיוחד שמשמעותו תהיה "לא מוגדר" - למשל, $\perp$ - ולהגדיר $f(x)=\perp$ לכל ערך $x\in A$ שעליו f לא הוגדרה. מכיוון שלרוב אין צורך בדקויות אלו, במרבית המקרים שבהם נתונה פונקציה אשר אינה מוגדרת על כל התחום שלה לרוב מסתפקים בציון הערכים עבורם היא אינה מוגדרת. פונקציות כאלו נקראות פונקציות **לא מלאות**.
בעיה מספר 2 ניתנת לפתרון על ידי שינוי הטווח - במקום $f:A\to B$ ניתן להגדיר $\hat{f}:A\to 2^B$, כך שאם $f(x)=y$ אז $\hat{f}(x)=\{y\}$, ואם ל-f יש יותר מפלט אחד על x, אז $\hat{f}(x)$ תחזיר את קבוצת הפלטים הזו. ניתן גם לטפל באופן זה בפונקציות שאינן מוגדרות על קלטים מסויימים באמצעות ההגדרה $f(x)=\emptyset$. כך למשל הפונקציה בבעיה מס' 2 ניתנת לתיאור כ-$\hat{f}(x)=\{\sqrt{x},-\sqrt{x}\}$. לרוב בפועל לא משתמשים פורמלית בהגדרה זו ומסתפקים בדיבור לא פורמלי על פונקציה שיכולה להחזיר מספר פלטים. פונקציות כאלו נקראות **פונקציות רב-ערכיות**.

2.3.2 פונקציות חד-חד ערכיות, פונקציות על ופונקציות הפיכות

נפתח בהצגה נוספת של שתי התכונות שעל יחס לקיים כדי שייחשב לפונקציה:

- (קיום) לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש-$(x, y) \in f$.
- (יחידות) לכל $x \in A$ ו-$y_1, y_2 \in B$, אם $(x, y_1) \in f$ וגם $(x, y_2) \in f$ אז $y_1 = y_2$.

נציג כעת שתי תכונות שפונקציה יכולה לקיים שהן דואליות לשתי התכונות שלעיל, בהחלפת תפקידי A ו-B:

הגדרה 2.17 תהא $f : A \to B$ פונקציה.

- f היא **על** אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש-$(x, y) \in f$, כלומר $f(x) = y$.
- f היא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם לכל $y \in B$ ו-$x_1, x_2 \in A$, אם $(x_1, y) \in f$ וגם $(x_2, y) \in f$ אז $x_1 = x_2$, כלומר $f(x_1) = f(x_2)$ גורר ש-$x_1 = x_2$.

כדי להבין את חשיבותה של ההגדרה, נזכור שעבור הפונקציה f, שהיא בפרט יחס, ניתן להגדיר את **היחס ההפוך** $f^{-1} \triangleq \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$.

טענה 2.18 f^{-1} היא פונקציה אם ורק אם f היא חח"ע ועל.

הוכחה: טריוואלי; תכונת ה"קיום" של f^{-1} היא בדיוק תכונת ה"על" של f, ותכונת ה"יחידות" של f^{-1} היא בדיוק תכונת ה"חח"ע" של f. ■

הגדרה 2.19 אם f היא חח"ע ועל אז נאמר ש-f היא **הפיכה** (באופן שקול, f היא הפיכה אם ורק אם היחס ההפוך f^{-1} הוא פונקציה).

2.3.3 קבוצות של פונקציות ומכפלות קרטזיות, גרסה כללית

לקבוצת **כל** הפונקציות $f : A \to B$ חשיבות רבה עד כדי כך שהיא זוכה לסימון מיוחד:

הגדרה 2.20 $B^A \triangleq \{f : A \to B\}$.

קיומה של B^A מובטח מכיוון ש-$B^A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times B))$, שכן כל פונקציה $f : A \to B$ היא יחס (תת-קבוצה של $A \times B$, כלומר איבר של $\mathcal{P}(A \times B)$).

סימון זה מבהיר את המשמעות של הסימון $2^A \triangleq \mathcal{P}(A)$: ניתן לחשוב על כל תת-קבוצה של A בתור פונקציה $f : A \to \{0, 1\}$ כך ש-$f(a) = 1$ אם ורק אם a שייך לתת-הקבוצה המוגדרת באמצעות f (וכפי שראינו, ניתן לחשוב על 2 כעל הקבוצה $\{0, 1\}$). מעתה ואילך נשתמש בסימון 2^A לתיאור קבוצת החזקה.

ראינו בפרק 1.5.5 את האופן שבו הוגדרה מכפלה קרטזית של שתי קבוצות, $A \times B$. באמצעות הגדרה זו הגדרנו פונקציות. כעת הפונקציות יוכלו להחזיר את החוב ונגדיר באמצעותן מכפלות קרטזיות כלליות.

נפתח באינטואיציה. עבור מכפלה קרטזית של n קבוצות, $A_1, \ldots, A_n$, אנו חושבים על אבריה בתור "n-יות" סדורות של איברים, $(a_1, \ldots, a_n)$. הדרישה המרכזית היא שהאיבר בכניסה ה-i יהיה שייך לקבוצה A_i. ניתן לכתוב זאת כך:

$$A_1 \times \cdots \times A_n \triangleq \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall 1 \le i \le n : \ a_i \in A_i\}$$

ההכללה למכפלה של סדרה אינסופית של קבוצות באה באופן טבעי, פשוט על ידי השמטת האיבר המקסימלי:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \triangleq \{(a_1, a_2, \ldots) \mid \forall 1 \le i : \ a_i \in A_i\}$$

הבעיה בשתי הגדרות לא פורמליות אלו היא שאין לנו עדיין הגדרה פורמלית של איברים כדוגמת $(a_1, \ldots, a_n)$ ו-$(a_1, a_2, \ldots)$. את הראשון אנו יודעים לבנות בדרך אחת באמצעות הפעלה נשנית של בניית זוג סדור, אבל את השני, האינסופי, אין לנו דרך לבנות באופן זה. רעיונית, בשני המקרים מדובר על **פונקציות**, אשר לוקחות מספר טבעי (במקרה הראשון בין 1 ל-n ובמקרה השני כל מספר טבעי גדול או שווה ל-1) ומחזירות איבר השייך לאחת מהקבוצות המשתתפות במכפלה, כלומר הוא נמצא באיחוד שלהן. אנו מוסיפים את הדרישה כי האיבר במקום ה-i יהיה שייך ספציפית לקבוצה במקום ה-i במכפלה.

ניתן אם כן לכתוב:

$$A_1 \times \cdots \times A_n \triangleq \{f : \{1, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid \forall 1 \le i \le n : \ f(i) \in A_i\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \triangleq \{f : \{1, 2 \ldots\} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid \forall 1 \le i : \ f(i) \in A_i\}$$

שתי ההגדרות דומות מאוד. ההבדל ביניהן בא לידי ביטוי בתחום של הפונקציה f; בחירת תחומים אחרים תעבוד אף היא. נציג אם כן את ההגדרה הכללית ביותר.

תהא X משפחה של קבוצות (בדוגמאות שלנו המשפחות היו $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ו-$X = \{A_1, A_2, \ldots\}$). תהא Λ קבוצה כך שקיימת פונקציה על $\Phi : \Lambda \to X$. אנו חושבים על Λ בתור קבוצת **אינדקסים**, ונסמן $A_i \triangleq \Phi(i)$.

הגדרה 2.21 **המכפלה הקרטזית** $\prod_{i\in\Lambda} A_i$ מוגדרת בתור $\prod_{i\in\Lambda} A_i \triangleq \{f : \Lambda \to \bigcup X \mid \forall i \in \Lambda : f(i) \in A_i\}$

המושג שהגדרנו כעת של מכפלה קרטזית מאפשר לנו לנסח בצורה בהירה את אחת מהאקסיומות החשובות של תורת הקבוצות: **אקסיומת הבחירה**.

הגדרה 2.22 **אקסיומת הבחירה** היא הטענה הבאה: תהא X משפחה של קבוצות כך ש-$\emptyset \notin X$ ותהא Λ קבוצת אינדקסים עבורה. אז $\prod_{i\in\Lambda} A_i \neq \emptyset$.

לאקסיומת הבחירה ניסוח שקול, שמציג באופן מפורש יותר את אופי ה"בחירה" המעורבת:

הגדרה 2.23 תהא X משפחה של קבוצות כך ש-$\emptyset \notin X$. **פונקציית בחירה** C היא פונקציה $C : X \to \bigcup X$ המקיימת $C(A) \in A$ לכל $A \in X$.

אקסיומת הבחירה היא הטענה הבאה: אם X משפחה של קבוצות כך ש-$\emptyset \notin X$ אז קיימת עבורה פונקציית בחירה.

בהמשך נציין במפורש הוכחות שבהן אנו עושים שימוש באקסיומת הבחירה. לעתים ניתן להסתפק בגרסאות חלשות יותר של אקסיומת הבחירה (למשל, בגרסה שמניחה ש-Λ היא בת מניה) אך לא ניכנס לרמת הפירוט הזו.

2.3.4 הרכבת פונקציות

מכיוון שפונקציות הן מקרה פרטי של יחסים, ההגדרה של **הרכבה** תקפה גם לגביהן:

הגדרה 2.24 ההרכבה $g \circ f$ תסומן לרוב כ-gf והסימון $gf(x)$ ייצג את האיבר $g(f(x))$.

שימו לב להבדלי הסימון בהם נקטנו: הסימון $g \circ f$ מתאר את הרכבת **היחסים** f, g, אך מכיוון שאנו רגילים לחשוב על פונקציות כאילו הן פועלות מימין לשמאל, העדפנו את הסימון gf (ללא $\circ$) כדי לתאר את הפונקציה שבה קודם כל f פועלת ואחר כך g פועלת.

בהגדרה שלעיל מסתתרת ההנחה ש-$g \circ f$ היא אכן פונקציה:

טענה 2.25 אם $f : A \to B$ ו-$g : B \to C$ הן פונקציות, אז **ההרכבה** שלהן $g \circ f$ היא פונקציה מ-A אל C.

הוכחה: קיום: אם $a \in A$ הוא איבר כלשהו, אז מכיוון ש-f פונקציה קיים $b \in B$ כך ש-$(a,b) \in f$. מכיוון ש-g פונקציה, עבור b הזה קיים $c \in C$ כך ש-$(b,c) \in g$. מהגדרת הרכבת יחסים נובע ש-$(a,c) \in g \circ f$.

יחידות: נניח ש-$(a,c_1) \in f \circ g$ וגם $(a,c_2) \in f \circ g$. אז מהגדרת הרכבת יחסים, קיימים $b_1, b_2 \in B$ כך ש-$(a,b_1), (a,b_2) \in f$ וגם $(b_1,c_1), (b_2,c_2) \in g$. מכיוון ש-$f$ פונקציה, הרי שמ-$(a,b_1), (a,b_2) \in f$ נובע ש-$b_1 = b_2$. כעת מכיוון ש-g פונקציה, משוויון זה ומ-$(b_1,c_1), (b_2,c_2) \in g$ נובע ש-$c_1 = c_2$. ■

טענה 2.26 הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית. כלומר, $(hg)f = h(gf)$ לכל שלוש פונקציות $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$.

הוכחה: הרכבת פונקציות היא מקרה פרטי של הרכבת יחסים, וראינו בטענה 2.3 כי הרכבת יחסים היא אסוציאטיבית. ■

הגדרה 2.27 **פונקציית הזהות** על קבוצה A היא פונקציה $\mathrm{Id}_A : A \to A$ המקיימת $\mathrm{Id}_A(x) = x$ לכל $x \in A$.

טענה 2.28 תהא $f : A \to B$ פונקציה.

- אם f חד-חד ערכית, אז קיימת $g : B \to A$ כך ש-$gf = \mathrm{Id}_A$.
- אם f על אז קיימת $g : B \to A$ כך ש-$fg = \mathrm{Id}_B$.
- אם f הפיכה אז $f^{-1}f = \mathrm{Id}_A$ ו-$ff^{-1} = \mathrm{Id}_B$.

הוכחה: נניח כי f חח"ע. יהי $a\in A$ כלשהו (אם $A=\emptyset$ אז f טריוויאלית ממילא). נגדיר

$$g\left(y\right)=\begin{cases}x & \exists x\in A:f\left(x\right)=y\\a & \neg\exists x\in A:f\left(x\right)=y\end{cases}$$

במילים, אם קיים x ש-f מעבירה ל-y, אז x זה יהיה פלט g; אחרת, הפלט יהיה a שרירותי. נשים לב לכך ש-g מוגדרת היטב שכן חד-חד ערכיות f מבטיחה שאם קיים x שמועבר ל-y, הוא יחיד.

נניח כי f על. יהי $y\in B$ כלשהו. קיים x (אחד לפחות) כך ש-$f\left(x\right)=y$. נגדיר $g\left(y\right)=x$. כעת מתקיים $fg\left(y\right)=f\left(g\left(y\right)\right)=f\left(x\right)=y$, כנדרש.

השוויונות $f^{-1}f=\mathrm{Id}_{A}$ ו-$ff^{-1}=\mathrm{Id}_{B}$ נובעים ישירות מההגדרה של f^{-1}. ■

מסקנה 2.29 תהיינה A,B קבוצות. קיימת פונקציה $f:A\to B$ שהיא חח"ע אם ורק אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ שהיא על.

הוכחה: אם $f:A\to B$ חח"ע קיימת $g:B\to A$ כך ש-$gf=\mathrm{Id}_{A}$, כלומר לכל $a\in A$ מתקיים $g\left(\left(f\left(a\right)\right)\right)=a$ ומכאן ש-g על.

אם $g:B\to A$ על אז קיימת $f:A\to B$ כך ש-$gf=\mathrm{Id}_{A}$, כלומר אם $f\left(a_{1}\right)=f\left(a_{2}\right)$ אז $a_{1}=g\left(f\left(a_{1}\right)\right)=g\left(f\left(a_{2}\right)\right)=a_{2}$ ומכאן ש-f חח"ע. ■

דוגמאות:

- הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=x^{2}$ איננה חח"ע (כי $f\left(1\right)=f\left(-1\right)=1$) ואיננה על (כי ל-$-1$ אין מקור). העובדה שהיא איננה חח"ע באה לידי ביטוי בגרף הפונקציה בכך שקיים קו מאוזן החותך את הפונקציה בשני מקומות; העובדה שהיא איננה על באה לידי ביטוי בכך שקיים קו מאוזן שאינו חותך אותה כלל.
- הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=x^{3}$ היא כן חח"ע ועל, ולכן הפיכה; ההופכית שלה מסומנת כ-$f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$.
- הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=x+1$ היא חח"ע אך איננה על, כי אין מקור ל-0.
- הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor$ היא על (המקור של y הוא $2y$) אך איננה חח"ע כי למשל $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$ ($\left\lfloor a\right\rfloor$ הוא **הערך השלם התחתון** של a; המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל-a).

לעתים קרובות אנחנו עוסקים ביותר משתי קבוצות שבינן יש פונקציות שהן חח"ע, על והפיכות; לכן המשפט הבא מועיל:

טענה 2.30 תהיינה A,B,C קבוצות ו-$f:A\to B$ ו-$g:B\to C$ פונקציות. נגדיר $h:A\to C$ על ידי $h=gf$.

1. אם f,g הן חח"ע, כך גם h.
2. אם f,g הן על, כך גם h.
3. אם f,g הן הפיכות, כך גם h.

הוכחה: נניח כי $h\left(x_{1}\right)=h\left(x_{2}\right)$, כלומר $g\left(f\left(x_{1}\right)\right)=g\left(f\left(x_{2}\right)\right)$. מחח"ע g נובע ש-$f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{2}\right)$ ומחח"ע f נובע ש-$x_{1}=x_{2}$.

נניח כי $c\in C$ הוא איבר כלשהו. מכיוון ש-g על קיים $b\in B$ כך ש-$g\left(b\right)=c$. מכיוון ש-f על קיים $a\in A$ כך ש-$f\left(a\right)=b$. על כן $h\left(a\right)=g\left(f\left(a\right)\right)=g\left(b\right)=c$ ולכן h על.

הטענה על f,g הפיכות נובעת משתי קודמותיה. ■

קיום פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ מעידה על כך ששתי הקבוצות A,B הן במובן מסויים "אותו הדבר". אפשר לחשוב על f כפונקציה ש"משנה את השם" של אברי A, ובאופן זה מתקבלים בדיוק אברי B, כך שניתן לחשוב על A,B כעל "אותה קבוצה עם שמות אחרים לאיברים". זוהי תכונה כה חשובה עד כי ניתן לה שם:

הגדרה 2.31 אומרים שקבוצות A,B הן **שקולות** ומסמנים $A\sim B$ אם קיימת פונקציה $f:A\to B$ שהיא חח"ע ועל.

טענה 2.32 שקילות של קבוצות היא יחס שקילות.

הוכחה: לכל קבוצה A, $A\sim A$ עם הפונקציה $f:A\to A$, $f(a)=a$ שהיא בבירור חח"ע ועל.

אם $A\cong B$ אז קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$, ולכן קיימת הפונקציה $f^{-1}:B\to A$. f^{-1} היא חח"ע שכן אם $f^{-1}(b_1)=f^{-1}(b_2)$ אז $b_1=ff^{-1}(b_1)=ff^{-1}(b_2)=b_2$; ו-$f^{-1}$ היא על שכן אם $a\in A$ הוא איבר כלשהו, אז $f^{-1}f(a)=a$, ולכן $f(a)$ הוא מקור של a. לכן $B\sim A$.

אם $A\sim B$ ו-$B\sim C$ אז קיימות פונקציות חח"ע ועל $f:A\to B$ ו-$g:B\to C$. נגדיר פונקציה $h:A\to C$ על ידי $h=gf$. כפי שראינו קודם, מכיוון ש-f,g הפיכות כך גם h. ■

3 גודלן של קבוצות אינסופיות

3.1 המלון של הילברט

בפרק זה נעסוק בתגליותיו של גאורג קנטור לגבי האופן שבו ניתן להשוות את גודלן של קבוצות אינסופיות והמסקנות המפתיעות שנובעות מכך. לפני שנתחיל לעסוק בנושא בצורה פורמלית, נציג גרסה אחת לסיפור שמקורו במתמטיקאי דויד הילברט, אשר השתמש בו כדי להמחיש את ההבדל בין קבוצות סופיות ואינסופיות.

הסיפור הולך כך: אי שם קיים לו בית מלון מוזר, שיש בו אינסוף חדרים לאורחים. ליתר דיוק, יש חדר לכל מספר טבעי חיובי: חדר מס' 1, חדר מס' 2, חדר מס' 3 וכן הלאה עד אין קץ. המלון הוא הצלחה מסחררת וכל החדרים תפוסים.

בחצות הלילה נשמע צלצול בפעמון דלפק הקבלה, ומנהל המלון מגלה שאורח חדש רוצה להשתכן במלון. במלון רגיל לא הייתה ברירה בשלב זה אלא להשיב את פני האורח ריקם, אבל במלון האינסופי מצליח בעל המלון רב התושיה למצוא פתרון. הוא מודיע במערכת הכריזה של המלון כי כל האורחים מתבקשים לעבור חדר, לחדר שמספרו גדול ב-1 ממספר חדרם שלהם. למשל, אורח מס' 7 יעבור לחדר 8, וכן הלאה.

מייד קמה מהומת אלוהים - כל אורח אורז במהירות את חפציו תוך שהוא רוטן לעצמו, יוצא מהחדר, ממתין בסבלנות עד שגם בעל החדר שמספרו גדול ב-1 יצא ממנו ואז נכנס ומשתכן בחדר בשלווה. כל התחלופה לוקחת לא יותר מחמש דקות. לאחר מכן, הפלא ופלא! חדר מס' 1 פנוי, ובעל המלון משכן בו את האורח החדש וחוזר למיטתו מרוצה.

פתאום נשמע עוד צלצול בפעמון דלפק הקבלה! בעל המלון חש אליו רק כדי לגלות שהעלילה מסתבכת. כעת הגיע למלון האינסופי **אוטובוס אינסופי**; קיים בו מושב מס' 1, מושב מס' 2, מושב מס' 3 וכן הלאה, לכל מספר טבעי אפשרי. כל האורחים תובעים להשתכן במלון תכף ומייד, ולבעל המלון לא נעים לסרב. האם יש פתרון?

בעל המלון ממהר למערכת הכריזה, מתנצל בפני כל אורחי המלון ומבטיח פיצוי, ואז מבקש מכל אורח לעבור לחדר שמספרו **כפול** ממספר חדרו הנוכחי. כך למשל אורח מס' 7 יעבור לחדר 14, ואילו אורח 14 יעבור לחדר 28 וכן הלאה.

שוב קמה מהומת אלוהים, ושוב תוך חמש דקות כל המעברים מסתיימים. הפלא ופלא, מתברר שכעת **כל** החדרים שמספרם אי זוגי התפנו! בעל המלון משכן את האורח ממושב 1 בחדר 1, את האורח ממושב 2 בחדר 3, את האורח ממושב 3 בחדר 5 וכן הלאה - האורח ממושב n מתארח בחדר $2n-1$.

בעל המלון שוב חוזר למיטתו שמח ומאושר.

צלצול בפעמון!

בעל המלון גורר את עצמו לקבלה, ועיניו חושכות: כעת הגיעו **אינסוף** אוטובוסים, שבכל אחד מהם **אינסוף** מושבים; כעת כל אורח חדש מתואר הן על ידי מספר האוטובוס שלו והן על ידי מספר המושב שלו באוטובוס הזה. כך למשל אורח $(3,4)$ יושב במושב מס' 4 באוטובוס מס' 3. כל האורחים תובעים להשתכן תכף ומיד ולא מוכנים לקבל "לא" כתשובה. מה יעשה בעל המלון?

במוחו של בעל המלון צץ תעלול חדש. הוא פונה שוב אל מערכת הכריזה, מתחנן בפני אורחיו הקיימים שיהיו סבלניים, ומבקש מהם **שוב** לעבור כל אורח לחדר שמספרו גדול פי 2. שוב מתפנים כל החדרים שמספרם אי זוגי. כעת, בעל המלון נוקט בתעלול הבא: הוא ממספר את כל המספרים הראשוניים האי-זוגיים: $3,5,7,11,13,\ldots$. ב-p_n מסומן הראשוני ה-n-י במספור הזה. כעת הוא אומר לאורח (a,b) לעבור לחדר p_a^b. במילים אחרות, לכל אוטובוס מותאם מספר ראשוני שייחודי לאוטובוס הזה, ולאורח ה-k-י באוטובוס הזה נאמר להשתכן בחדר שהוא החזקה ה-k-ית של הראשוני שמותאם לאוטובוס.

מכיוון שחזקה של ראשוני אי זוגי היא אי זוגית, ומכיוון שחזקות של ראשוניים שונים הן שונות, כל האורחים החדשים מצליחים להשתכן במלון לבטח. בעל המלון חוזר למיטתו שמח ומאושר, עד שהוא מבין שחדרים רבים במלון נותרו **ריקים**, למשל חדר 15. הבזבוז מקשה עליו להירדם, והנה **שוב** צלצול בפעמון! בעל המלון יוצא למגרש החניה, ולשמחתו הפעם מחכה לו רק אוטובוס אינסופי **אחד**, אבל אחד שהוא שמן למדי וגדוש נוסעים ששרויים באי סדר מוחלט. בעל המלון מנסה לבקש מהאורחים לשבת במקומות מסומנים אך ללא הואיל. כיצד יוכל להורות לאיזה אורח להיכנס לאיזה חדר? במוחו עולה רעיון מבריק - הוא יבקש מכל אורח את מספר הזהות שלו ועל פי מספר זה יחליט איך לשכן אותם.

לרוע המזל, מתברר שמספר הזהות של כל אורח הוא בעצמו אינסופי! כלומר, כל מספר זהות הוא סדרה אינסופית של ספרות מ-0 עד 9. אמנם, בעל המלון מסוגל לערוך חישובים גם עם סדרות סופיות שכאלו, אבל למרות זאת הוא פונה אל כל אורחי האוטובוס ואומר "מצטער חברים, אין מקום במלון בשבילכם".

מייד מתחילה מהומת אלוהים. "אין מקום? מה זאת אומרת אין מקום?" "גם קודם לא היה מקום והצלחת להכניס אינסוף אורחים פנימה!" "מה, אפילו אינסוף אוטובוסים הצלחת!" "מה יש לך נגדנו? זו אפליה לרעת אנשים בעלי מספר זהות אינסופי?" ועוד ועוד.

בעל המלון רואה שזה יקח זמן. הוא מתיישב על כסא הנהג ומרים את ידיו על מנת להרגיע את המלון. "חברים, חברים, רגע, בואו תנו לי להסביר..."

3.2 מדידת גדלים של קבוצות

מהו גודל של קבוצה? אינטואיטיבית, גודל הוא **מספר** האיברים שבקבוצה. הקבוצה $A=\{0,1e,\pi,i\}$ כוללת חמישה איברים ולכן טבעי לומר שגודלה הוא 5. עם זאת, זוהי איננה הגדרה פורמלית; אם נגדיר "גודל קבוצה הוא מספר האיברים שבה" נצטרך להסביר מהו "מספר האיברים" שגם אותו טרם הגדרנו. אם כן, עלינו למצוא דרך לתאר גודל של קבוצות באמצעות המושגים שבנינו עד כה.
כאן נחלץ מושג ה**פונקציה** לעזרתנו: אנחנו יכולים להשתמש בפונקציה כדי **למספר** את אברי הקבוצה. למשל, נתבונן בפונקציה:

$$f(0)=0,f(1)=1,f(e)=2,f(\pi)=3,f(i)=4$$

פונקציה זו ממספרת את אברי A מ-0 ועד 4, ובכך מהווה אינדיקציה לכך שיש ב-A בדיוק חמישה איברים. נשים לב לכך שזו רחוקה מלהיות הפונקציה היחידה שמתאימה למטרה זו; כך למשל גם הפונקציה

$$g(0)=3,g(1)=0,g(e)=4,g(\pi)=2,g(i)=1$$

מראה את אותו הדבר בדיוק, אף שכעת המספור "מעורבב" ביחס למספור ש-f הציעה.
התכונות החשובות שמשותפות הן ל-f והן ל-g הן ששתיהן חד-חד-ערכיות ושתיהן על מהקבוצה A אל הקבוצה $B=\{0,1,2,3,4\}$.
כדי להמחיש את חשיבות תכונות אלו נתבונן בשתי דוגמאות נגדיות:

- הפונקציה $h:\{0,1\}\to\{0\}$ המוגדרת על ידי $h(0)=h(1)=0$ היא על הקבוצה $\{0\}$ אך איננה חד-חד ערכית. מכאן האינטואיציה שאם יש פונקציה $h:A\to B$ שהיא **על** B אז גודלה של A הוא לפחות כגודל B, אבל יכול להיות גם גדול יותר.

- הפונקציה $h:\{0\}\to\{0,1\}$ המוגדרת על ידי $h(0)=0$ היא חח"ע אך איננה על, ומכאן האינטואיציה שאם יש פונקציה $h:A\to B$ שהיא חח"ע אז גודלה של A הוא לכל היותר כגודל B.

מכאן אנו מגיעים להגדרה המרכזית שלנו. מכיוון שהמושג שאנו מתארים יהיה תקף גם לקבוצות אינסופיות, לא נשתמש במילה "גודל" אלא במילה "עוצמה", שהיא פחות טעונה במשמעויות אינטואיטיביות.

הגדרה 3.1 בהינתן שתי קבוצות A,B, נאמר שהן **שוות עוצמה** ונסמן זאת $|A|=|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$.
במילים אחרות, קבוצות הן שוות עוצמה אם ורק אם הן שקולות.

נתבונן בכמה דוגמאות קונקרטיות של שוויון עוצמה בין קבוצות (נציג את הפונקציה החח"ע ועל המתאימה בין הקבוצות אך לא נוכיח כי היא אכן חח"ע ועל):

- נסמן $\mathbb{S}=\{0,1,4,9,16,\dots\}=\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$ קבוצת הריבועים של מספרים טבעיים. אז $\mathbb{N}\sim\mathbb{S}$ עם הפונקציה $f(n)=n^2$.
  אבחנה מפתיעה זו ניתנה כבר על ידי גלילאו. תוצאה זו נראית מוזרה ממבט ראשון שכן לא רק ש-$\mathbb{S}$ היא קבוצה חלקית ל-$\mathbb{N}$, אלא גם שה"חורים" בין שני איברים סמוכים של A הולכים וגדלים: בין 4 ו-9 "חסרים" 4 מספרים טבעיים, בין 9 ו-16 "חסרים" 6, בין 16 ל-25 "חסרים" 8 וכדומה.

- $\mathbb{R}\sim(0,1)$. נבנה את ההתאמה החח"ע והעל בין שתי הקבוצות כהרכבה של מספר התאמות חח"ע ועל בין "קבוצות ביניים":
  - נגדיר $f_1:(0,1)\to(-1,1)$ על ידי $f_1(x)=2x-1$. פונקציה זו ראשית "מותחת" את הקטע $(0,1)$ והופכת אותו ל-$(0,2)$ ולאחר מכן מזיזה אותו יחידה אחת שמאלה והופכת אותו ל-$(-1,1)$.
  - נגדיר $f_2:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ על ידי $f_2(x)=\frac{\pi}{2}x$. גם כאן האפקט הוא של "מתיחה" של הקטע על ידי הכפלה במספר קבוע.
  - נגדיר $f_1:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ על ידי $f_3(x)=\tan x$. הבחירה בטנגנס כאן היא מכיוון שזוהי פונקציה מוכרת ופשוטה שמבצעת את האפקט המבוקש ("מריחת" קטע סופי על פני כל הממשיים).
  - כעת נגדיר $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ על ידי ההרכבה $f=f_3f_2f_1=\tan\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right)$. ניתן לבדוק כי f_i חח"ע ועל לכל $1\le i\le 3$ ולכן כך גם f.

- $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\cup\{-1\}$ ("המלון של הילברט", מקרה 1) עם הפונקציה $f:\mathbb{N}\cup\{-1\}\to\mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x+1$.

- $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\{0,1\}$ ("המלון של הילברט", מקרה 2) עם הפונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f((n,x))=2n+x$.

הגדרה 3.2 נסמן $|A|\le|B|$ אם ורק אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$.

ראינו במסקנה 2.29 שקיימת $f:A\to B$ חח"ע אם ורק אם קיימת $g:B\to A$ על. לכן מתבקש להשתמש בסימון $|B|\ge|A|$ אם קיימת פונקציה $f:A\to B$ שהיא על.

3.3 קבוצות בנות מניה

ראינו כבר את החשיבות של $\mathbb{N}$ בתור הדוגמה הבסיסית שלנו לקבוצה אינסופית "קטנה ביותר". זה מצדיק את השימוש בסימונים מיוחדים:

הגדרה 3.3 אם $|A| = |\mathbb{N}|$ נאמר ש-A היא קבוצה שעוצמתה **אלף-אפס** ונסמן זאת $|A| = \aleph_0$. אם A סופית או מעוצמה $\aleph_0$ נאמר גם ש-A היא **בת-מניה**.

ישנם כאלו שמשתמשים ב"בת מניה" כדי לתאר רק קבוצות אינסופיות מעוצמה $\aleph_0$; כדי למנוע בלבול נאמר במפורש על מקרים כאלו "בת-מניה אינסופית".

הסימון $\aleph_0$ מרמז כי יש גם $\aleph_1, \aleph_2$ וכדומה, ואכן ישנם כאלו, אך בשל מורכבות הנושא והצורך במושגים נוספים שטרם הגדרנו כדי לתארו כראוי נדחה את הטיפול בו לפרק 4.7.

אם קבוצה היא בת מניה אינסופית, אז ניתן להציג אותה בתור **סדרה** של איברים: $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. בכיוון ההפוך, אם ניתן להציג שיטה ל**מספור** אברי קבוצה כלשהי, אז הקבוצה היא בת מניה:

טענה 3.4 אם קיימת סדרה שבה מופיעים כל אברי A, אז A בת מניה.

הוכחה: נגדיר פונקציה $f : A \to \mathbb{N}$ שמתאימה לכל איבר A את האינדקס של המקום הראשון בסדרה שבו הוא מופיע (זהו מספר טבעי). זוהי בבירור פונקציה חח"ע ולכן $|A| \le |\mathbb{N}|$. אם A סופית, סיימנו; אחרת, $|\mathbb{N}| \le |A|$ וממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נקבל $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. ■

בזכות טענה זו קל להוכיח שקבוצות הן בנות מניה מבלי להזדקק להצגה של פונקציה חח"ע ועל מפורשת בין A והטבעיים - פשוט מציגים דרך שיטתית כלשהי למנות, או לסדר, או לייצר באופן סדרתי, את אברי A. שימו לב שאין מניעה אפילו שאותו איבר של A יופיע מספר פעמים במניה.

טענה 3.5 $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

הוכחה: באמצעות המספור $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. בשלב ה-k של המספור נספרים k ו-$-k$. ■

טענה 3.6 (קנטור) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

הוכחה: אינטואיטיבית, הרעיון של קנטור הוא כדלהלן: כתבו טבלה אינסופית שבה בשורה ה-a והעמודה ה-b נמצא הביטוי $\frac{a}{b}$. כעת עברו סדרתית על הטבלה על גבי **האלכסונים המשניים** שלה. כלומר, התחילו מ-$(0,0)$; אחר כך עברו על האלכסון $(1,0), (0,1)$; לאחר מכן על $(2,1), (1,1), (0,2)$ וכן הלאה. בכל שלב אנו עוברים על כל הזוגות ש**סכומם** זהה (בשלב הראשון על זוגות שסכומם 0, בשלב השני על זוגות שסכומם 1 וכן הלאה).

באופן פורמלי אנו מבצעים את האלגוריתם הבא:

1. לכל $n = 0, 1, 2, \dots$:
   (א) לכל $a = 0, 1, \dots n$:
      i. הוסף למניה את $\frac{a}{b}$ ואת $-\frac{a}{b}$ כאשר $b = n - a$.

יהא $\frac{a}{b}$ מספר רציונלי כלשהו, אז בבירור הוא יופיע במניה בשלב שבו $n = a + b$. לכן כל מספר רציונלי מופיע במניה.

נשים לב כי המספור כולל **ביטויים חסרי משמעות** דוגמת $\frac{0}{0}$, וכי מספרים רציונליים מופיעים במספור יותר מפעם אחת, למשל חצי מופיע גם כ-$\frac{1}{2}$ וגם כ-$\frac{2}{4}$ וגם באינסוף דרכים אחרות. אין כאן בעיה מכיוון שכל מה שנדרש על מנת להוכיח את הטענה הוא שכל מספר רציונלי יופיע בסדרה לפחות פעם אחת; מופעים נוספים אינם גורמים לבעיות וכך גם מופעים של ביטויים שאינם מספרים רציונליים. אם היה עלינו להציג מספור שבו מופיע כל מספר רציונלי בדיוק פעם אחת ואין בנוסף לכך ביטויים חסרי משמעות התיאור שלו היה מסובך יותר באופן משמעותי. ■

תוצאה זו של קנטור היא מפתיעה למדי בשל ההבדלים המהותיים בין הטבעיים והרציונליים; בין כל זוג טבעיים קיימים אינסוף רציונליים.

את שיטת ההוכחה ניתן להכליל לתוצאה חזקה אף יותר:

משפט 3.7 תהא $A_0, A_1, A_2, \dots$ סדרה של קבוצות כך ש-$|A_n| = \aleph_0$. אז $|\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n| = \aleph_0$ (איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה).

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$, מכיוון ש-A_n היא בת מניה אז ניתן למספר את איבריה: $A_n = \{a_0^n, a_1^n, \dots\}$.
כעת נשתמש במניה באמצעות לולאה מקוננת:

1. לכל $n = 0, 1, 2, \dots$:
   (א) לכל $k = 0, 1, 2, \dots, n$:
      i. הוסיפו למניה את a_k^{n-k}.

יהא $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, אז קיימים $x, y \in \mathbb{N}$ כך ש-$a = a_x^y$. אז a נכלל במניה עבור $k = x$ ו-$n = x + y$. ■

נשים לב שהטענה נכונה גם עבור איחודים סופיים של קבוצות, $A_1, \dots, A_k$; פשוט נגדיר $A_n = A_k$ לכל $n > k$ ונשתמש במשפט. בדומה, אם אחת מהקבוצות A_n היא סופית אפשר פשוט להגדיר $a_k^n = a_1^n$ לכל $k > |A_n|$ ולכן די לדרוש ש-$|A_n| \le \aleph_0$.

משפט 3.8 אם $|A| = |B| = \aleph_0$ אז $|A \times B| = \aleph_0$

הוכחה: ניתן למנות את אברי A: $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. כעת, $A \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(a_n, b) \mid b \in B\}$, והקבוצות $\{(a_n, b) \mid b \in B\}$ הן בנות מניה שכן קיימת התאמה חח"ע ועל בין כל אחת מהן ל-B ($(a_n, b) \mapsto b$). כעת נשתמש בטענה הקודמת. ■

3.4 האלכסון של קנטור

עד כה ראינו קבוצות רבות שהן בנות מניה, והדבר עשוי לתת את התחושה כי **כל** קבוצה היא בת מניה. אחת מתגליותיו הגדולות של קנטור הייתה כי לא כך הדבר.

משפט 3.9 (האלכסון של קנטור) $|\mathbb{R}| \ne \aleph_0$

הוכחה: נניח כי $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ ולכן קיימת לה מניה. עבור מניה זו, נבנה מספר ממשי אשר **אינו** מופיע בתוך המניה; מכיוון שנציג שיטה שעושה זאת עבור **כל** מניה של $\mathbb{R}$, המסקנה תהיה שמניה של $\mathbb{R}$ אינה קיימת.

הרעיון הוא לבנות את המספר שאינו מופיע במניה על ידי כך שנבטיח שהוא יהיה שונה "קצת" מכל מספר במניה - מספיק יהיה לקלקל ספרה אחת בכל אחד מהמספרים במניה. הסיבה שבגללה נוכל לעשות זאת היא שבמספר ממשי יש **אינסוף** ספרות שיש לנו חופש פעולה לקבוע.

ראשית, נזכור כי ראינו כי $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ ולכן די להוכיח כי $|(0,1)| \ne \aleph_0$. כל מספר ממשי בין 0 ל-1 ניתן לכתיבה בתור $0.a_1a_2a_3\dots$ כאשר $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ היא ספרה. קיימים מספרים שניתן להציג בשתי דרכים שונות, כך למשל $0.8999\dots = 0.9000\dots$. תופעה זו מתרחשת רק במספרים שנגמרים בסדרה אינסופית של 9 או 0 ולא תהיה רלוונטית עבור ההוכחה.

נניח כי קיים מספור של המספרים הממשיים בין 0 ו-1, אז נכתוב טבלה שבה השורות הן המספרים והעמודות הן הספרות:

$$
\begin{aligned}
r^1 &= 0.a_1^1a_2^1a_3^1a_4^1\dots \\
r^2 &= 0.a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2\dots \\
r^3 &= 0.a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

וכעת נבנה מספר ממשי $b = 0.b_1b_2b_3\dots$ השונה מכל המספרים $r^1, r^2, \dots$ על ידי כך שנגדיר אותו בתור מעין היפוך של **האלכסון** של הטבלה: $b_n = \begin{cases} 3 & a_n^n = 4 \\ 4 & a_n^n \ne 4 \end{cases}$

נניח בשלילה כי $b = r^n$ עבור n כלשהו; אז נשים לב לכך ש-$a_n^n \ne b_n$, כלומר b נבדל מ-r^n בספרה במקום ה-n. זה מראה כי $b \ne r^n$ שכן הדרך היחידה שבה ייתכן $b = r^n$ למרות ההבדל בספרה היא אם הספרה היא 0 באחד המספרים ו-9 בשניה. ■

תוצאה זו מצביעה על הבדל מהותי ביותר בין המספרים הרציונליים והממשיים. הבדל זה מפתיע למדי בהתחשב בתכונת ה**צפיפות** של הרציונליים: בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי.

הסיבה שבגללה לא ניתן להוכיח שהרציונליים אינם בני מניה באותה הדרך היא שהפיתוח העשרוני של הרציונליים הוא **מחזורי** (החל ממקום מסויים). בשל כך, לא ניתן להסתפק בבניה של b כפי שהוצגה כאן, שכן הכרחי להבטיח ש-b שיתקבל יהיה בעל פיתוח עשרוני מחזורי (החל ממקום מסויים). מכיוון שלא ניתן לעשות זאת, ההוכחה נכשלת.

מכיוון ש-$|\mathbb{R}| \ne \aleph_0$ קיימים סימונים מיוחדים לעוצמה זו:

הגדרה 3.10 $|\mathbb{R}|$ נקראת **עוצמת הרצף** והיא מסומנת לעתים כ-$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$, או כ-$2^{\aleph_0}$ (הסיבה לסימון האחרון תתברר בהמשך).

קנטור הוכיח משפט כללי יותר מאשר רק $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$ (אך תוצאה זו ראויה להצגה נפרדת בשל הוכחתה הציורית והאינטואיטיבית יחסית), שמראה כי ישנן **אינסוף** עוצמות שונות:

משפט 3.11 (קנטור) לכל קבוצה A, $|A| < \left|2^A\right|$, כלומר עוצמת קבוצת החזקה של A גדולה מעוצמת A.

הוכחה: קל לראות ש-$|A| \leq \left|2^A\right|$ על ידי הפונקציה החח"ע $f(x) = \{x\}$. עיקר ההוכחה היא כי $|A| \neq \left|2^A\right|$.
נניח בשלילה כי קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to 2^A$, ונגדיר קבוצה $D = \{a \in A | a \notin f(a)\}$.
על פי הגדרתה, $D \subseteq A$ ולכן $D \in 2^A$; מכיוון ש-f על, קיים $x \in A$ כך ש-$f(x) = D$.
כעת, אם $x \in D$ אז $x \in f(x)$ ולכן על פי הגדרת D, $x \notin f(x)$ כלומר $x \notin D$, סתירה; ואילו אם $x \notin D$ אז $x \notin f(x)$ ולכן על פי הגדרת D, $x \in D$, ושוב הגענו לסתירה. ■

הדמיון של הוכחה זו לפרדוקס של ראסל אינו מקרי; ראסל גילה את הפרדוקס בזמן שעסק בהוכחה זו של קנטור. למעשה, עוד לפני ראסל גילה קנטור פרדוקס שנובע מייד ממשפטו:

משפט 3.12 (**פרדוקס קנטור**) "קבוצת כל הקבוצות" אינה קיימת.

הוכחה: נניח שקיימת קבוצה X כך שכל קבוצה שייכת ל-X. אז בפרט כל איבר של 2^X שייך ל-X, דהיינו $2^X \subseteq X$, כלומר $\left|2^X\right| \leq |X|$, בסתירה לכך ש-$|X| < \left|2^X\right|$. ■

המסקנה מפרדוקס זה, בדומה לפרדוקס ראסל, היא שלא כל אוסף של קבוצות הוא בעצמו קבוצה. את אוסף כל הקבוצות מכנים אם כן **מחלקה** ולא מניחים שהוא מקיים תכונות של קבוצות ובפרט לא ניתן לדבר על עוצמת מחלקת כל הקבוצות.
משפט קנטור מצדיק את השימוש בסימון $2^{|A|}$ כדי לתאר עוצמות; זוהי עוצמתה של קבוצת החזקה של A. בפרט, אם $|A| = \aleph_0$ אז $2^{\aleph_0}$ מסמנת את עוצמת קבוצת החזקה של A (אנו מתבססים כאן על ההנחה שלא הוכחנו כי אם $A \sim B$ אז $2^A \sim 2^B$).
משפט קנטור מראה בפרט כי $2^{\aleph_0} = 2^{|\mathbb{N}|} = \left|2^{\mathbb{N}}\right| \neq \aleph_0$. כעת נשלים את התמונה ונראה מהי עוצמת הרצף המדויקת. מכיוון שאנו עוסקים ב-$\mathbb{R}$, באופן טבעי למדי ההוכחה תתבסס על תוצאות סטנדרטיות באנליזה מתמטית.

משפט 3.13 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

הוכחה: ראשית, נראה כי $|\mathbb{R}| \leq \left|2^{\mathbb{Q}}\right| = 2^{\aleph_0}$. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{Q}}$ על ידי $f(r) = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq r\}$ (לכל ממשי אנו מתאימים את קבוצת הרציונליים הקטנים ממנו או שווים לו). כדי לראות כי f חח"ע, יהיו $r, s \in \mathbb{R}$ שונים זה מזה ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $r < s$, אז מצפיפות הרציונליים קיים q כך ש-$r < q < s$, כלומר $q \in f(s)$ אבל $q \notin f(r)$, מה שמוכיח כי $f(r) \neq f(s)$.
כעת נראה כי $2^{\aleph_0} = \left|\{0,2\}^{\mathbb{N}}\right| \leq |\mathbb{R}|$ על ידי פונקציה חח"ע $\{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. לכל סדרה $\overline{a} = a_1, a_2, \ldots$ (אנו מתחילים את האינדקס מ-1 מטעמי נוחות הסימון בלבד) נגדיר $g(\overline{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. טור זה מתכנס תמיד (למשל, ממבחן השורש של קושי) ולכן הפונקציה מוגדרת היטב. נראה כעת כי אם $\overline{a} \neq \overline{b}$ אז $g(\overline{a}) \neq g(\overline{b})$. יהי k האינדקס הראשון בו $\overline{a}, \overline{b}$ נבדלות ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $a_n = 2, b_n = 0$. אז:

$$
\begin{aligned}
g(\overline{a}) - g(\overline{b}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - b_n)}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n}
\end{aligned}
$$

כעת, $\frac{1}{3^k} = \frac{2}{3^{k+1}}\frac{3}{2} = \frac{2}{3^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^n} \geq \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{a_n - b_n}{3^n}\right|$ ולכן $\left|g(\overline{a}) - g(\overline{b})\right| \geq \frac{2}{3^k} - \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^k}$, כלומר $g(\overline{a}) \neq g(\overline{b})$ ■

לתמונה של הפונקציה g שהגדרנו במהלך ההוכחה יש חשיבות בפני עצמה במתמטיקה: קבוצה זו נקראת **קבוצת קנטור** והיא מקיימת מספר תכונות מפתיעות שאת רובן לא נוכל להציג כאן. הדרך המקובלת לחשוב עליה היא זו: נגדיר $C_0 = [0,1]$, וכעת נגדיר באופן אינדוקטיבי את C_{n+1} בתור אוסף הקטעים המתקבל מ-C_n על ידי כך שמסירים מכל קטע ב-C_n את השליש האמצעי שלו. כך למשל $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ו-$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ וכן הלאה. כעת נגדיר את קבוצת קנטור באמצעות $C \triangleq \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. תכונה מעניינת אחת של קבוצת קנטור שנוכל להצביע עליה מייד היא כי למרות שמתקיים $|C| = 2^{\aleph_0}$ כפי שראינו,

הרי שסכום הקטעים ש"הוצאנו" מ-C במהלך בנייתה הוא 1; שכן בשלב הראשון הוצאנו קטע אחד מאורך $\frac{1}{3}$; בשלב השני שני קטעים מאורך $\frac{1}{9}$; בשלישי, ארבעה קטעים מאורך $\frac{1}{27}$ וכן הלאה, מה שמניב את הסכום $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1/3} = 1$. במילים אחרות, החסרנו מ-C את כל ה**אורך** מבלי לשנות את ה**כמות** של איברים ב-C!

לעובדה ש-$|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$ יש השלכות מתמטיות לא טריוויאליות. נציג כאן אחת מהן, שהוצגה על ידי קנטור עצמו במאמר שבו תיאר את שיטת האלכסון. לצורך כך נזדקק להגדרה:

הגדרה 3.14 **שורש** של פולינום $p(x)$ הוא איבר a כך ש-$p(a)=0$. **מספר טרנצנדנטי** הוא מספר ממשי $a\in\mathbb{R}$ שאינו שורש של אף פולינום במקדמים רציונליים, כלומר לכל $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ מתקיים $p(a)\neq 0$.

משפט 3.15 (קנטור) קיימים אינסוף מספרים טרצנדנטיים.

הוכחה: לפולינום ממעלה n מעל $\mathbb{Q}$ קיימים לכל היותר n שורשים (ניתן להוכיח טענה זו באינדוקציה על מעלת הפולינום תוך הסתמכות על כך שאם a שורש של פולינום אז $x-a$ מחלק את הפולינום). כמו כן, כל פולינום ממעלה n במקדמים רציונליים נקבע על ידי סדרה מאורך $n+1$ של מספרים רציונליים. מכאן שיש רק מספר בן מניה של שורשים של פולינומים ממעלה $n+1$. מכיוון שאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה, הרי שקבוצת כל השורשים של פולינומים מעל $\mathbb{Q}$ היא בת מניה, ולכן קיימים אינסוף ($2^{\aleph_0}$) מספרים ממשיים שאינם שורשים של אף פולינום במקדמים רציונליים. ■

טבעי למדי להניח שהעוצמה של $\mathbb{R}$ היא העוצמה "הבאה בתור" אחרי עוצמת $\mathbb{Q}$, שהרי ככלות הכל קבוצות אלו דומות מאוד באופיין ו-$\mathbb{R}$ נבנה מתוך $\mathbb{Q}$ בצורה טבעית. העובדה ש-$|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$ רק מחזקת תחושה זו, שכן משפט קנטור הראה שבאופן כללי, עבור קבוצה A, העוצמה הבאה בגודלה אחרי $|A|$ שקל למצוא היא $2^{|A|}$. אינטואיציה זו הובילה את קנטור להשערה הבאה:

השערה 3.16 (השערת הרצף) לא קיימת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ כך ש-$\aleph_0<|A|<2^{\aleph_0}$.

השערה זו (והכללתה, שניתן לתאר אינטואיטיבית בתור "לכל A אינסופית לא קיימת B כך ש-$|A|<|B|<2^{|A|}$" אף שהניסוח המדויק מורכב יותר) הייתה בעיה פתוחה מרכזית במתמטיקה של סוף המאה ה-19 ותחילת המאה ה-20. לא עלה בידי קנטור לפתור אותה, והיא ניצבה במקום הראשון ברשימת 23 הבעיות שהציג דויד הילברט בהרצאתו בקונגרס המתמטי של 1900. רק בשנות ה-60 של המאה ה-20, כתוצאה מעבודות בלתי תלויות של קורט גדל ופול כהן, הוכח כי השערה זו **אינה תלויה באקסיומות של תורת הקבוצות** (מערכת האקסיומות ZFC, שאיננו מתארים כאן במפורש), בדומה לאופן שבו אקסיומת המקבילים לא הייתה תלויה בשאר אקסיומות הגאומטריה.

3.5 משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

משפט 3.17 (קנטור-שרדר-ברנשטיין) אם $|A|\leq|B|$ וגם $|B|\leq|A|$ אז $|A|=|B|$.

הוכחה: נניח כי קיימות פונקציות חח"ע $f:A\to B$ ו-$g:B\to A$ ונבנה פונקציה $h:A\to B$ שהיא חח"ע ועל באופן הבא:

ראשית נגדיר $D_0=A\backslash g(B)$, ובאופן אינדוקטיבי $D_{n+1}=g(f(D_n))$.

כעת נגדיר $D=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n$, וכעת נגדיר את h:

$$h(a)=\begin{cases}f(a) & a\in D\\ g^{-1}(a) & a\in A\backslash D\end{cases}$$

h בבירור מוגדרת לכל A.

נראה כי h על B: יהא $b\in B$. אם $g(b)=a\in A\backslash D$, אז $h(a)=g^{-1}(a)=b$ וסיימנו.

נניח אם כן כי $g(b)\in D$, כלומר $g(b)\in D_n$ עבור n כלשהו. לא ייתכן ש-$n=0$ כי $D_0=A\backslash g(B)$; לכן $n\geq 1$.

כעת, מכיוון ש-$g(b)\in D_n=g(f(D_n))$ אז $g(b)=g(b')$ עבור $b'\in f(D_n)$, ומכיוון ש-g חח"ע $b=b'$, כלומר $b\in f(D_n)$ ובפרט יש $a\in D_n\subseteq D$ כך ש-$f(a)=b$, כלומר $h(a)=b$.

נראה כעת כי h חח"ע. עבור $a_1,a_2\in D$ ברור כי $h(a_1)=h(a_2)$ גוררת $a_1=a_2$ כי f חח"ע. בדומה, אם $a_1,a_2\in A\backslash D$ אז $h(a_1)=h(a_2)$ גורר ש-$g^{-1}(a_1)=g^{-1}(a_2)$ ובגלל ש-g פונקציה, $a_1=a_2$.

נותר לטפל במקרה בו (ללא הגבלת הכלליות) $a_1\in D$ ו-$a_2\in A\backslash D$, ומתקיים $h(a_1)=h(a_2)$, כלומר $f(a_1)=g^{-1}(a_2)$. על ידי הפעלת g על שני האגפים נקבל ש-$a_2=g(f(a_1))$; מכיוון ש-$a_1\in D$ אז $a_1\in D_n$ עבור n כלשהו ולכן $a_2\in g(f(D_n))=D_{n+1}\subseteq D$, בסתירה לכך ש-$a_2\in A\backslash D$. ■

3.6 קבוצות אינסופיות

אם קבוצה איננה סופית הרי שהיא **אינסופית**. אנו מכירים קבוצה אחת כזו לפחות:

טענה 3.18 $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינסופית. בפרט, לכל $n \in \mathbb{N}$, לא קיימת פונקציה על $f : n \to \mathbb{N}$.

הוכחה: יהא $n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי כלשהו ופונקציה $f : n \to \mathbb{N}$ כלשהי. נגדיר $a = \max \{f(0), \ldots, f(n-1)\} + 1$, אז $a \in \mathbb{N}$ הוא איבר ב-$\mathbb{N}$ שאין לו מקור ב-n, כי הוא גדול ב-1 מכל תמונה של איבר ב-n, ולכן f אינה על. מכיוון ש-f הייתה פונקציה כלשהי, נסיק שלא קיימת פונקציה על מ-n אל $\mathbb{N}$ (ובפרט לא קיימת פונקציה חח"ע ועל). ■

נשים לב כי קיומה של קבוצה אינסופית אינו נובע משאר אקסיומות תורת הקבוצות! אנו נזקקים לאקסיומה מפורשת שמניחה קיום של קבוצה אינסופית.

במובן מסויים $\mathbb{N}$ היא הקבוצה האינסופית מהגודל "הקטן ביותר", כפי שמראה האפיון הבא להיות קבוצה אינסופית:

משפט 3.19 A היא אינסופית אם ורק אם קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ שהיא חח"ע.

הוכחה: נניח כי קיימת $f : \mathbb{N} \to A$ שהיא חח"ע, אז יש פונקציה $g : A \to \mathbb{N}$ שהיא על. אם קיימת פונקציה $h : n \to A$ שהיא חח"ע ועל עבור n טבעי כלשהו, אז ההרכבה $gh : n \to \mathbb{N}$ היא על $\mathbb{N}$ וכבר ראינו כי לא קיימת פונקציה מ-n על $\mathbb{N}$.

בכיוון השני, נגדיר את הפונקציה באופן אינדוקטיבי על ידי סדרת קבוצות $A_0, A_1, \ldots$ כך ש-$A_0 = A$, $f(n) \in A_n$ ו-$A_{n+1} = A_n \setminus \{f(n)\}$. נניח בשלילה שמתישהו $A_n = \emptyset$ לה n כלשהו ולכן הבניה "נתקעת", אז $A = \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$ וקיבלנו ש-$f : n \to A$ היא חח"ע ועל ולכן A סופית. מכאן שלא מתקיים $A_n = \emptyset$ לאף איבר בבניה וקיבלנו $f : \mathbb{N} \to A$ שהיא חח"ע. ■

בעזרת אפיון זה קל להוכיח דרכים נוספות להראות כי קבוצה היא אינסופית:

3.7 חשבון עוצמות

עבור קבוצות סופיות A, B העוצמות שלהן, $|A|, |B|$ הן מספרים טבעיים, ועל מספרים טבעיים קיימות פעולות חשבון המוכרות לנו: חיבור, כפל והעלאה בחזקה. כולן מתאימות לפעולות שניתן לבצע על קבוצות.

טענה 3.20 עבור קבוצות סופיות A, B מתקיים:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. בפרט אם A, B זרות אז $|A \cup B| = |A| + |B|$.
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$

תוצאות אלו נותנות לנו מוטיבציה להגדיר כללי חשבון עבור עוצמות אינסופיות. טרם הגדרנו במפורש מהי עוצמה, כך שעלינו להיזהר מעט בניסוחינו.

הגדרה 3.21 יהיו A, B קבוצות כלשהו. נגדיר:

- חיבור: $|A| + |B| \triangleq |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$
- כפל: $|A| \cdot |B| \triangleq |A \times B|$
- חזקה: $|A|^{|B|} \triangleq \left|A^B\right|$

עלינו להראות שההגדרה הזו אכן **מוגדרת היטב**, דהיינו שאם $A \sim A'$ ו-$B \sim B'$ אז

- $A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \sim A' \times \{0\} \cup B' \times \{1\}$
- $A \times B \sim A' \times B'$
- $A^B \sim A'^{B'}$

נציג הוכחה עבור הטענה השלישית. שתי האחרות קלות יותר. יהיו $f : A \to A'$ ו-$g : B \to B'$ חח"ע ועל. אנו רוצים להציג $\Psi : A^B \to A'^{B'}$ חח"ע ועל. נגדיר $\Psi(\alpha) = f \cdot \alpha \cdot g^{-1}$. בדיקה ישירה מראה כי הפונקציה מוגדרת היטב, דהיינו כי כל ההרכבות חוקיות. קל לראות ש-Ψ הפיכה: $\Phi : A'^{B'} \to A^B$ המוגדרת על ידי $\Phi(\alpha') = f^{-1} \cdot \alpha' \cdot g$ גם היא מוגדרת היטב ומתקיים $\Phi(\Psi(\alpha)) = f^{-1}\left(f \cdot \alpha \cdot g^{-1}\right) \cdot g = \alpha$.

טענה 3.22 חיבור וכפל עוצמות הם אסוציאטיביים וקומוטטיביים.

הוכחה: טריוויאלי. ■

התכונות המעניינות והמועילות של חוקי חשבון העוצמות שמשתמרות מהמקבילה שלהם במספרים טבעיים הם החוקים הנוגעים לחזקות:

משפט 3.23 יהיו A, B, C קבוצות כלשהן. אז מתקיים:

1. $|A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B|} \cdot |A|^{|C|}$
2. $|A|^{|B| \cdot |C|} = \left(|A|^{|B|}\right)^{|C|}$

הוכחה: על מנת להוכיח את 1 די להוכיח כי אם B, C זרות אז $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$. נגדיר $\Psi : A^{B \cup C} \sim\to A^B \times A^C$ על ידי $\alpha \mapsto (\beta, \gamma)$ כאשר $\alpha : B \cup C \to A$ ו-$\beta = \alpha|_B$ ו-$\gamma = \alpha|_C$. ההופכי נתון על ידי $(\beta, \gamma) \mapsto \alpha_{\beta,\gamma}$ כאשר $\alpha_{\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} \beta(x) & x \in B \\ \gamma(x) & x \in C \end{cases}$. התנאי B, C זרות מבטיח שהפונקציה מוגדרת היטב.

על מנת להוכיח את 2 די להוכיח ש-$A^{B \times C} \sim \left(A^B\right)^C$. האינטואיציה לשקילות זו היא שבהינתן פונקציה בשני משתנים, $f : B \times C \to A$, אנחנו מסוגלים לקבל ממנה פונקציה במשתנה יחיד על ידי "קיבוע" של המשתנה השני. יהא $c \in C$ כלשהו, אז אפשר להגדיר פונקציה חדשה, $f_c : B \to A$ על ידי $f_c(b) = f(b, c)$. תיארנו כאן תהליך אשר מקבל כקלט איבר $c \in C$ ומחזיר כפלט פונקציה $f_c \in A^B$, דהיינו תיארנו פונקציה $\alpha_f : C \to A^B$ המוגדרת על ידי $\alpha_f(c) = f_c$. נשים לב שהפונקציה הזו תלויה בעצמה בפרמטר - הפונקציה $f \in A^{B \times C}$. לכן ההתאמה שמקבלת f ומחזירה את α_f היא בעצמה פונקציה, $\Psi : A^{B \times C} \to \left(A^B\right)^C$.

בכיוון השני, נגדיר $\Phi : \left(A^B\right)^C \to A^{B \times C}$ באופן הבא: $\Phi(g) = f$ כך ש-$f(b, c) \triangleq g(c)(b)$.

תהא כעת $f \in A^{B \times C}$. נרצה להראות ש-$\Phi(\Psi(f)) = f$. לשם כך נחשב:

$\Phi\Psi(f)(b, c) = \Phi(\alpha_f)(b, c) = \alpha_f(c)(b) = f_c(b) = f(b, c)$

כנדרש. ■

משפט 3.24 אם A, B, C קבוצות כך שמתקיים $|B| \le |C|$, אז:

1. $|A| + |B| \le |A| + |C|$
2. $|A| \cdot |B| \le |A| \cdot |C|$
3. $|A|^{|B|} \le |A|^{|C|}$
4. $|B|^{|A|} \le |C|^{|A|}$

הוכחה: טריוויאלי. ■

נבין כעת מקצת מהתכונות של חשבון עוצמות באמצעות דוגמאות.

טענה 3.25 $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ו-$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

הוכחה: אלו בדיוק שני המקרים של המלון של הילברט ונפתרים באותו האופן. ■

טענה 3.26 $\aleph + \aleph = \aleph$.

הוכחה: נשתמש בחשבון עוצמות. ראינו כי $2^{\aleph_0} = \aleph$, ועל כן:
$\aleph + \aleph = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+1} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ ■

טענה 3.27 $\aleph + \aleph_0 = \aleph$.

הוכחה: יש לנו את שרשרת אי השוויונים $\aleph \le \aleph + \aleph_0 \le \aleph + \aleph = \aleph$ שמוכיחה שוויון לכל אורכה. ■

4 קבוצות סדורות ומספרים סודרים

4.1 קבוצות סדורות חלקית

4.1.1 הגדרה ודוגמאות

סוג חשוב ביותר של יחסים שטרם דיברנו עליהם הם **יחסי סדר** המכלילים את היחס $\leq$ המוכר לנו מהמספרים הטבעיים. נפתח בהגדרה:

הגדרה 4.1 תהא P קבוצה. יחס דו מקומי $\leq$ על P ייקרא **יחס סדר חלקי** (ולעתים פשוט **יחס סדר**) אם הוא מקיים את שלוש התכונות הבאות:

1. (רפלקסיביות): לכל $a \in P$ מתקיים $a \leq a$.
2. (טרנזיטיביות): אם $a \leq b$ וגם $b \leq c$ אז $a \leq c$.
3. (אנטי-סימטריות): אם $a \leq b$ וגם $b \leq a$ אז $a = b$.

כמו כן, הסימון $a < b$ פירושו $a \leq b$ וגם $a \neq b$.
הזוג $(P, \leq)$ של קבוצה P ויחס סדר חלקי המוגדר עליה נקרא **קבוצה סדורה חלקית**.
אם $(P, \leq)$ היא קבוצה סדורה חלקית ובנוסף לכך מתקיימת התכונה שלכל $a, b \in P$ או ש-$a \leq b$ או ש-$b \leq a$ (או שניהם), אז $\leq$ נקרא **סדר מלא** או **סדר לינארי** ו-$(P, \leq)$ נקראת **קבוצה סדורה לינארית**.

- ההגדרה מזכירה את זו של יחס שקילות (2.6) אך נבדלת ממנה בתכונת הסימטריות, שכאן הוחלפה בתכונה כמעט הפוכה: לא ייתכן שגם $a \leq b$ וגם $b \leq a$ מתקיימים בו זמנית עבור $a \neq b$. בשל כך, כל התוצאות שראינו על יחסי שקילות (ובפרט האופן שבו הם משרים חלוקה על הקבוצה שמעליה הם מוגדרים) אינן רלוונטיות עבור יחסי סדר.
- עבור יחס סדר כללי מקובל להשתמש בסימון $\leq$; במקרים פרטיים עשויים להשתמש בסימון אחר. כאשר יש סכנה לבלבול נשתמש בסימון $\preceq$ כדי לתאר יחס סדר חלקי. ייתכן אפילו שנשתמש באותו סימון עבור יחסי סדר שונים של קבוצות שונות כאשר לא יהיה חשש לבלבול.

דוגמאות: 4.2

1. ניתן להגדיר על המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ יחס סדר באופן הבא: $a \leq b$ אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$a + n = b$. זה הופך את $(\mathbb{N}, \leq)$ לקבוצה סדורה חלקית (ואפילו לינארית).
2. באופן דומה ניתן להגדיר על $\mathbb{Z}$ יחס סדר, אך יש לנקוט בזהירות רבה יותר. אם נגדיר ש-$a \leq b$ אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-$a+k = b$ נקבל ש-$\leq$ הוא היחס המלא, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. לכן ההגדרה תהיה זהה להגדרה עבור טבעיים: $a, b \in \mathbb{Z}$ מקיימים $a \leq b$ אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$a + n = b$.
3. עבור מספרים רציונליים ההגדרה שעבדה עבור שלמים לא תעבוד יותר. למשל, $\frac{1}{2}$ קטן מ-1 על פי התפיסה האינטואיטיבית שלנו, אך לא קיים מספר טבעי n כך ש-$\frac{1}{2} + n = 1$. ניתן לפתור בעיה זו תוך שימוש ביחס הסדר על $\mathbb{Z}$: נגדיר שעבור $a, b \in \mathbb{Q}$ מתקיים $a \leq b$ אם קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$a + q = b$ ובנוסף לכך $q = \frac{\alpha}{\beta}$ כך ש-$\alpha \geq 0$ ו-$\beta \geq 0$.
4. הגדרת יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$ דורשת התייחסות לאופן שבו $\mathbb{R}$ נבנה מתוך $\mathbb{Q}$; נעסוק בבעיה זו בסעיף 4.1.2.
5. עבור המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ לא קיים יחס סדר "טבעי". עם זאת, יש דרכים רבות להגדיר יחס סדר על $\mathbb{C}$, למשל $z \preceq w$ אם ורק אם $|z| < |w|$ או $z = w$ (כאן $\leq$ הוא יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$). שימו לב כי בהגדרה זו לא קיים יחס כלל בין שני מספרים $z \neq w$ עבורם $|z| = |w|$; אם היינו מגדירים ש-$w \preceq z$ עבור $|w| = |z|$ היינו מקבלים מהגדרה זו שגם $z \preceq w$ בסתירה לאנטי-סימטריה.
6. אם $a, b \in \mathbb{N}$ אז נאמר ש-a מחלק את b ונסמן זאת על ידי $a|b$ אם קיים $x \in \mathbb{N}$ כך ש-$ax = b$. $(\mathbb{N}, |)$ היא קבוצה סדורה חלקית. זו איננה קבוצה סדורה לינארית כי למשל עבור $3, 5$ לא מתקיים $3|5$ וגם לא מתקיים $5|3$.
7. אם X קבוצה כלשהי אז $\left(2^X, \subseteq\right)$ היא קבוצה סדורה חלקית עם יחס ההכלה. זו איננה קבוצה סדורה לינארית במרבית המקרים כי אם קיימים $a, b \in X$ כך ש-$a \neq b$ אז $\{a\}, \{b\}$ הם שני איברים שאינם ניתנים להשוואה.

8. אם X קבוצה כלשהי, אז קבוצת כל החלוקות של X היא קבוצה סדורה חלקית עם יחס הסדר $\mathcal{F}_1 \preceq \mathcal{F}_2$ אם $\mathcal{F}_1$ היא עידון של $\mathcal{F}_2$.

9. אם $(P, \leq)$ היא קבוצה סדורה חלקית ו-$A \subseteq P$ היא תת-קבוצה כלשהי של P, אז גם $(A, \leq)$ היא קבוצה סדורה חלקית עם אותו יחס סדר. במקרה כזה אומרים ש-$\leq$ **מושרה** על A. אם $\leq$ הוא סדר מלא על P, הוא יהיה מלא גם על A.

10. אם $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2)$ הן קבוצות סדורות חלקית כך ש-$P_1 \cap P_2 = \emptyset$, אז ניתן להגדיר יחס סדר על $P_1 \cup P_2$ באופן הבא: $x \leq y$ אם $x, y \in P_1$ ומתקיים $x \leq_1 y$; או ש-$x, y \in P_2$ ומתקיים $x \leq_2 y$; או ש-$x \in P_1$ ו-$y \in P_2$ (במילים אחרות, אנחנו משמרים את הסדר בתוך הקבוצות P_1, P_2 ובנוסף לכך קובעים שכל אברי P_2 גדולים מכל אברי P_1). אם $\leq_1, \leq_2$ היו סדרים מלאים, כך גם $\leq$ (נוכיח זאת בהמשך).

11. אם $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2)$ הן קבוצות סדורות חלקית אז ניתן להגדיר סדר $\leq$ על $P_1 \times P_2$ באופן הבא: $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ אם $a_1 <_1 b_1$ או $a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq_2 b_2$. דהיינו, משווים קודם כל את הזוג על פי הקואורדינטה הראשונה, ואם הקואורדינטה הראשונה שווה אז משווים על פי הקואורדינטה השניה. סדר זה על המכפלה הקרטזית נקרא **סדר לקסיקוגרפי**. ניתן להכליל את ההגדרה באופן אינדוקטיבי עבור מכפלה קרטזית של מספר סופי כלשהו של קבוצות. במקרה שבו $\leq_1, \leq_2$ הם סדרים מלאים כך גם $\leq$ (נוכיח זאת בהמשך).

ניתן להגדיר יחסי סדר גם בצורה שונה, שמתאימה לתפיסה האינטואיטיבית של "קטן ממש":

הגדרה 4.3 תהא P קבוצה. יחס דו מקומי $<$ על P ייקרא **יחס סדר חזק** אם הוא מקיים את שתי התכונות הבאות:

1. (א-רפלקסיביות): לכל $a \in P$ **לא** מתקיים $a < a$.
2. (טרנזיטיביות): אם $a < b$ וגם $b < c$ אז $a < c$.

הקשר בין שתי ההגדרות של סדר הוא ברור:

טענה 4.4 תהא P קבוצה. אם $\leq$ הוא יחס סדר חלקי על P אז היחס $<$ המוגדר על ידי $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$ הוא יחס סדר חזק. בדומה, אם $<$ הוא יחס סדר חזק על P אז היחס $\leq$ המוגדר על ידי $a \leq b \iff a < b \vee a = b$ הוא יחס סדר חלקי.

הוכחה: טריוויאלי. ■

עקב הקשר ההדוק בין שתי ההגדרות נשתמש בשתיהן בחופשיות, בהתאם לסיטואציה. לעתים נוח יותר להשתמש באחת מההגדרות מכיוון שזה חוסך כתיבה מיותרת. באופן כללי כאשר נגיד "יחס סדר" נתכוון תמיד ליחס סדר חלקי "רגיל" $\leq$ ולא ליחס סדר חזק $<$ אלא אם נאמר זאת במפורש.

כל קבוצה סדורה חלקית ניתן לתאר באמצעות רכיבים שהם סדורים בסדר מלא, ורכיבים שאינם ניתנים להשוואה:

הגדרה 4.5 תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית ו-$A \subseteq P$.

- A תיקרא **שרשרת** אם $(A, \leq)$ סדורה לינארית.
- A תיקרא **אנטי-שרשרת** אם אף זוג איברים ב-A אינו ניתן להשוואה, כלומר לכל $x, y \in A$ כך ש-$x \neq y$, מתקיים $x \not\leq y$ וגם $y \not\leq x$.

טיבם האנטי-סימטרי של יחסי סדר מאפשר לנו לתת משמעות לאיברים מינימליים ומקסימליים. זה מוביל אותנו לסדרת ההגדרות הבאה:

הגדרה 4.6 תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית ו-$a \in P$.

- a הוא **איבר מינימלי** אם לא קיים $b \in P$ כך ש-$b < a$.
- a הוא **איבר מקסימלי** אם לא קיים $b \in P$ כך ש-$a < b$.
- a הוא **איבר ראשון (איבר קטן ביותר)** אם לכל $b \in P$ מתקיים $a \leq b$.
- a הוא **איבר אחרון (איבר גדול ביותר)** אם לכל $b \in P$ מתקיים $b \leq a$.

ההבדל שבין איבר מינימלי ובין איבר ראשון הוא שאיבר מינימלי לא חייב להיות בר-השוואה לכל אברי P, להבדיל מאיבר ראשון שכן חייב.

בבירור אם בקבוצה יש איבר ראשון אז הוא האיבר המינימלי היחיד, ואם יש בה איבר אחרון הוא האיבר המקסימלי היחיד. כמו כן, בקבוצה סדורה לינארית אם קיים איבר מינימלי אז הוא גם איבר ראשון (ולכן יש לכל היותר איבר מינימלי יחיד), ואם יש איבר מקסימלי אז הוא גם איבר אחרון.

דוגמאות 4.7:

1. בקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N},\leq)$ קיים איבר ראשון 0 אך אין איבר אחרון או איברים מקסימליים.
2. בקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N},|)$ קיים איבר ראשון 1, ובאופן מעט בלתי אינטואיטיבי, 0 הוא איבר אחרון שכן $a|0$ לכל a מתוך ההגדרה.
3. בקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{N}\setminus\{0,1\},|)$ אין איבר אחרון, וכל מספר ראשוני $p\in\mathbb{N}$ הוא איבר מינימלי.
4. אם X היא קבוצה כלשהי, אז בקבוצה הסדורה חלקית $\left(2^X,\subseteq\right)$ האיבר $\emptyset$ הוא איבר ראשון והאיבר X הוא איבר אחרון.
5. אם X היא קבוצה כלשהי, אז בקבוצה הסדורה חלקית של כל החלוקות של X יש איבר ראשון (החלוקה $\mathcal{F}=\{\{x\}\,|x\in X\}$) ואיבר אחרון (החלוקה $\mathcal{F}=\{X\}$).
6. בקבוצה הסדורה חלקית $(\mathbb{Z},\leq)$ אין איברים מינימליים או מקסימליים.

אם נתונה לנו קבוצה סדורה חלקית $(P,\leq)$ עם תת-קבוצה $A\subseteq P$, ניתן לדבר על **חסמים** על A בתוך P:

הגדרה 4.8 תהא $(P,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית ו-$A\subseteq P$.

- $b\in P$ הוא **חסם מלעיל** (או **חסם מלמעלה**) של A אם $a\leq b$ לכל $a\in A$.
- $b\in P$ הוא **חסם מלרע** (או **חסם מלמטה**) של A אם $b\leq a$ לכל $a\in A$.
- $b\in P$ הוא **חסם עליון** (או **סופרמום**) של A ומסומן ב-$b=\sup A$ אם b הוא איבר ראשון בקבוצת החסמים מלעיל של A, כלומר b חסם מלעיל של A ולכל c שהוא חסם מלעיל של A מתקיים $b\leq c$.
- $b\in P$ הוא **חסם תחתון** (או **אינפימום**) של A ומסומן ב-$b=\inf A$ אם b הוא איבר אחרון בקבוצת החסמים מלרע של A, כלומר b חסם מלרע של A ולכל c שהוא חסם מלרע של A מתקיים $c\leq b$.

אבחנה מיידית היא שלכל קבוצה A יש לכל היותר חסם עליון אחד וחסם תחתון אחד, מכיוון שאם לקבוצה יש איבר ראשון (או אחרון) הוא יחיד.

דוגמאות 4.9:

- לקטע $A=(0,1)=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\leq 1\}$ שהוא תת-קבוצה של $(\mathbb{R},\leq)$ יש חסם תחתון 0 וחסם עליון 1; הקבוצה $[1,\infty)$ היא אוסף כל החסמים מלעיל של A והקבוצה $(-\infty,0]$ היא אוסף כל החסמים התחתונים של A.
- נתבונן בקבוצה $(\mathbb{Q},\leq)$ ובתת הקבוצה $A=\{x\in\mathbb{Q}|e<x<\pi\}$ (כאשר e,π הם הקבועים המתמטיים). אז ל-A אין חסם עליון ואין חסם תחתון כלל, אף שיש לה חסמים מלעיל וחסמים מלרע רבים. (אם $q\in(\pi,\infty)$ הוא חסם מלעיל של A ב-$\mathbb{Q}$ אז מצפיפות הרציונליים יש $p\in(\pi,q)$ רציונלי וגם הוא חסם מלעיל של A שקטן יותר מ-q. לכן אין ל-A חסם עליון). דרך אחרת לראות זאת: חסם עליון הוא יחיד, וכתת-קבוצה של $\mathbb{R}$ ל-(e,π) יש את החסם העליון π. לכן בתת-קבוצה של $\mathbb{R}$ שאינה כוללת את π לא יכול להיות חסם עליון (אחרת היינו מקבלים **שני** חסמים עליונים ב-$\mathbb{R}$).

4.1.2 בניית המספרים הממשיים

כעת אנו מסוגלים להשלים חוב: נציג את אחת מהדרכים הפורמליות שבהן מוגדרים המספרים הממשיים, באמצעות **חתכי דדקינד**. דרך אחרת להגדיר את המספרים הממשיים היא באמצעות **סדרות קושי** שהגדרתן דורשת מושגים מחשבון אינפיניטסימלי ולכן לא נציג אותה כאן. לעומתה, ההגדרה באמצעות חתכי דדקינד דורשת רק את מושג **החסם העליון** שכבר הגדרנו.

הגדרה 4.10 קבוצה $A \subseteq \mathbb{Q}$ של מספרים רציונליים עם יחס הסדר הרגיל על הרציונליים תיקרא **חתך** אם אין בה איבר מקסימלי, ולכל $a \in A$ ו-$b \in \mathbb{Q}$, אם $b \leq a$ אז $b \in A$.

השם "חתך" מגיע מכך שניתן לחשוב על חתך באופן ציורי כאילו "חתכנו" את ציר המספרים הרציונליים לשני חלקים, ואנו לוקחים אל תוך החתך את כל מה שמשמאל לנקודת החיתוך.

שימו לב לכך שנקודת החיתוך יכולה להיות מספר רציונלי, אבל גם עשויה שלא להתאים לאף מספר רציונלי, כפי שנראה בדוגמאות הבאות:

דוגמאות: 4.11

1. הקטע $(-\infty, 2) \cap \mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 2\}$ הוא חתך.
2. הקטע $(-\infty, 2] \cap \mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 2\}$ אינו חתך כי יש בו איבר מקסימלי - 2.
3. הקבוצה $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ היא חתך.

בדוגמה 3 נדמה כי נקטנו כאן בצורת כתיבה מסורבלת למדי והיה אפשר לכתוב גם $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq \sqrt{2}\}$, אלא שצורת כתיבה זו אינה חוקית. זאת מכיוון ש-$\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי, וטרם הגדרנו את יחס הסדר $\leq$ על מספרים שאינם רציונליים. למעשה, טרם הגדרנו בצורה פורמלית את המספרים הממשיים; זו בדיוק המטרה הנוכחית שלנו!

מבחינה אינטואיטיבית, אנו מרגישים שהחתך בדוגמה 3 "מגדיר" את $\sqrt{2}$, ובאופן כללי שאפשר להשתמש בכל חתך כדי להגדיר את המספר שמציין בדיוק את נקודת החיתוך שלו. נגדיר אם כן:

הגדרה 4.12 (מספרים ממשיים, הגדרה לפי דדקינד): המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מוגדרים באופן הבא: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid \text{חתך } A\}$.

כל מספר רציונלי r ניתן כעת לזהות עם החתך $A_r = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$, ובפועל כאשר מדברים על $\mathbb{R}$, כאשר אומרים "מספר רציונלי" הכוונה היא לאיברים של $\mathbb{R}$ שמתאימים באופן זה למספר רציונלי (קיימות דרכים אחרות להגדיר את $\mathbb{R}$ וכמו כן להגדיר את $\mathbb{Q}$ בהינתן $\mathbb{R}$, אך לא ניכנס אליהן כאן).

4.1.3 איזומורפיזם של קבוצות סדורות חלקית

עד כה, קיום של פונקציה $f : A \to B$ שהיא חח"ע ועל גרם לנו להתייחס אל A, B כאל "אותן קבוצות עד כדי שינוי שמות האיברים". כאשר עוסקים בקבוצות סדורות המצב שונה, שכן כעת ישנו מבנה נוסף על הקבוצות שיש להתחשב בו. לשם כך אנו נזקקים להגדרות הבאות:

הגדרה 4.13 תהיינה $(A, \leq)$ ו-$(B, \leq)$ קבוצות סדורות חלקית. פונקציה $f : A \to B$ היא **משמרת סדר** (או **מונוטונית עולה**) אם $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

אם קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא חח"ע, על, משמרת סדר ו-f^{-1} גם כן משמרת סדר, אז f נקראת **איזומורפיזם** (או **איזומורפיזם סדר**) של A עם B. נסמן זאת $(A, \leq) \cong (B, \leq)$ או פשוט $A \cong B$ כאשר ברור שמדובר על קבוצות סדורות ומהם יחסי הסדר הרלוונטיים.

איזומורפיזם $f : A \to A$ מקבוצה לעצמה נקרא **אוטומורפיזם**.

הדרישה ש-f^{-1} תהיה גם כן משמרת סדר נועדה כדי להבטיח שיתקיים $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$. מספר דוגמאות יסייעו להבהרת העניין:

1. נתבונן ב-$\mathbb{N}$ עם יחס הסדר הרגיל. הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ המוגדרת על ידי $f(n) = n + 1$ היא חח"ע, על ומשמרת סדר; הפונקציה ההופכית $f^{-1}(n) = n - 1$ גם היא משמרת סדר. מכאן ש-$\mathbb{N} \cong \mathbb{N}^+$.

2. לכל מספר טבעי $a\in\mathbb{N}$ נגדיר קבוצה $\langle a\rangle=\{an|n\in\mathbb{N}\}=\{0,a,2a,3a,\dots\}$. נגדיר קבוצה $I=\{\langle a\rangle\,|a\in\mathbb{N}\}$. נגדיר על I יחס סדר באמצעות הכלה **הפוכה**: $A\leq B$ אם $B\subseteq A$. נסמן את הקבוצה הסדורה המתקבלת ב-$(I,\supseteq)$. נגדיר כעת פונקציה $f:\mathbb{N}\to I$ על ידי $f(a)=\langle a\rangle$. בבירור f חח"ע ועל. ניתן להראות כי $\langle a\rangle\subseteq\langle b\rangle\iff b|a$, ומכאן ש- f ו-f^{-1} שתיהן משמרות סדר עבור הקבוצות הסדורות $(\mathbb{N},|)$ ו-$(I,\supseteq)$. שימו לב כי f איננה משמרת סדר בין $(\mathbb{N},|)$ ו-$(I,\subseteq)$ (I עם יחס ההכלה הרגיל) או בין $(\mathbb{N},\leq)$ לקבוצה I עם אף אחד משני יחסי הסדר המוגדרים באמצעות הכלה.

3. נראה כעת דוגמה לפונקציה חח"ע ועל f שהיא משמרת סדר אך f^{-1} איננה משמרת סדר. בהינתן "שני עותקים" של $\mathbb{N}$, ניתן להגדיר עליהם יחס סדר כך שאיברים שאינם באותו עותק אינם ניתנים להשוואה, וכך שכל האיברים בעותק הראשון קטנים מכל האיברים בעותק השני. פורמלית, נגדיר $A=(\mathbb{N}\times\{0,1\},\leq_A)$ כך שלכל $a\leq b$ מתקיים $(a,0)\leq_A(b,0)$ ו-$(a,1)\leq_A(b,1)$ ואין עוד איברים הניתנים להשוואה; ונגדיר $B=(\mathbb{N}\times\{0,1\},\leq_B)$ כאשר $\leq_B$ כולל את $\leq_A$ ובנוסף לכך גם $(a,0)\leq_B(b,1)$ לכל $a,b\in\mathbb{N}$. כעת הפונקציה $f((a,i))=(a,i)$ היא בבירור פונקציה חח"ע, על ומשמרת סדר מ-A אל B, אך f^{-1} איננה משמרת סדר (כי למשל $(1,0)\leq_B(0,1)$, אך $f^{-1}((1,0))=(1,0)\not\leq_A(0,1)=f((0,1))$).

טענה 4.14 איזומורפיזם הוא יחס שקילות.

הוכחה: לכל A, $A\cong A$ עם האיזומורפיזם הטריוויאלי $f(a)=a$.
אם $A\cong B$ עם האיזומורפיזם $f:A\to B$ אז $f^{-1}:B\to A$ הוא איזומורפיזם שמראה כי $B\cong A$.
אם $A\cong B$ עם האיזומורפיזם f ו-$B\cong C$ עם האיזומורפיזם g אז $A\cong C$ עם האיזומורפיזם gf. די אם נראה כי gf היא אכן משמרת סדר ו-$(gf)^{-1}$ גם כן משמרת סדר. יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש-$a_1\leq a_2$, אז $f(a_1)\leq f(a_2)$ כי f משמרת סדר, ו-$g(f(a_1))\leq g(f(a_2))$ כי g משמרת סדר. באותו אופן גם $(fg)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$ היא משמרת סדר בגלל ש-f^{-1},g^{-1} כאלו. $\blacksquare$

4.2 הלמה של צורן

הלמה של צורן היא משפט שימושי מאוד בשלל מקומות שונים במתמטיקה, על מנת להוכיח קיום של אובייקטים מורכבים שאין דרך ברורה לבנות במפורש. הלמה שקולה לאקסיומת הבחירה, כך שהוכחה שלה דורשת את אקסיומת הבחירה, וגם ניתן להניח אותה בתור אקסיומה ולהסיק ממנה את אקסיומת הבחירה.

משפט 4.15 (הלמה של צורן): תהא X קבוצה סדורה חלקית לא ריקה. אם לכל שרשרת של X קיים חסם מלעיל ב-X, אז קיים ב-X איבר מקסימלי.

את הוכחת הלמה נדחה להמשך, אחרי שנציג את מושג ה**רקורסיה על-סופית**.
נציג שימוש סטנדרטי לדוגמה בלמה של צורן, שדורש ידע בסיסי באלגברה לינארית:

משפט 4.16 יהא V מרחב וקטורי מעל שדה כלשהו ו-$A\subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. אז ניתן להרחיב את A לבסיס של V. בפרט עבור $A=\emptyset$ נובע שלכל מרחב וקטורי V קיים בסיס.

הוכחה: נגדיר את P בתור אוסף כל תת-הקבוצות $B\subseteq V$ שהן בלתי תלויות לינארית ו-$A\subseteq B$. אז $(P,\subseteq)$ היא קבוצה סדורה חלקית עם יחס הסדר הרגיל של הכלת קבוצות.
תהא $\mathcal{C}\subseteq P$ שרשרת לא ריקה ונגדיר $C=\bigcup\mathcal{C}$. אז $A\subseteq C$ (שכן $A\subseteq B$ לכל $B\in\mathcal{C}$). כמו כן, C בלתי תלויה לינארית שכן אם $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0$ עבור $x_1,\dots,x_n\in C$ ו-$\lambda_1,\dots\lambda_n$ איברים שונים מאפס בשדה, אז נגדיר C_i להיות איבר ב-$\mathcal{C}$ כך ש-$x_i\in C_i$. מכיוון ש-$\mathcal{C}$ סדורה לינארית, קיים k כך ש-$C_i\subseteq C_k$ לכל $1\leq i\leq n$ ולכן $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=0$ מראה שכבר C_k היא קבוצה תלויה לינארית, בסתירה להגדרת P. מכאן ש-$C\in P$ והוא חסם מלעיל של השרשרת $\mathcal{C}$.
מהלמה של צורן נסיק כעת כי קיים איבר מקסימלי $B\in P$. מכיוון ש-$B\in P$ הרי ש-B בלתי תלויה לינארית ו-$A\subseteq B$; נותר להוכיח כי B פורשת את V. נניח בשלילה כי קיים $v\in V$ שאינו ניתן להצגה כצירוף לינארי של אברי B, אז $B\cup\{v\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית המכילה את A ו-$B\subsetneq B\cup\{v\}$, בסתירה למקסימליות B. מכאן ש-B היא קבוצה פורשת ולכן בסיס, כנדרש. $\blacksquare$

משפט 4.17 הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה.

הוכחה: ההוכחה היא עוד דוגמה ליישום סטנדרטי של הלמה של צורן. תהא $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות לא ריקות ונבנה פונקצית בחירה עבור $\mathcal{F}$ באופן הבא: ראשית נגדיר קבוצה P של כל הפונקציות f שהן פונקציות בחירה על תתי-קבוצות $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$ ונשרה עליה את יחס סדר ההכלה $\subseteq$ הרגיל (כלומר, $f\leq g$ אם g מוגדרת כמו f על התחום של f, והתחום של g גדול או שווה לתחום של f).

בהינתן שרשרת $\mathcal{C} \subseteq P$, הרי ש-$\bigcup \mathcal{C}$ גם הוא פונקצית בחירה חלקית על $\mathcal{F}$ ולכן חסם מלעיל של $\mathcal{C}$. מכאן שתנאי הלמה של צורן מתקיימים וקיימת פונקציה $f \in P$ מקסימלית ביחס להכלה. נניח בשלילה כי קיימת קבוצה לא ריקה $B \in \mathcal{F}$ כך ש-f אינה מוגדרת על B. מכיוון ש-B לא ריקה קיים $b \in B$. אז הפונקציה $g \triangleq f \cup \{(B, b)\}$ מהווה סתירה לכך ש-f מקסימלית ב-P. מכאן שהנחת השלילה שגויה ו-f מוגדרת על כל הקבוצות הלא ריקות ב-$\mathcal{F}$, כנדרש. ■

4.3 קבוצות סדורות היטב

סוג חשוב במיוחד של קבוצות סדורות הן קבוצות סדורות היטב. אלו קבוצות שבהן הסדר מזכיר במובן מסויים את זה של המספרים הטבעיים:

הגדרה 4.18 קבוצה סדורה חלקית $(P, \leq)$ נקראת **קבוצה סדורה היטב** (ו-$\leq$ נקרא **סדר טוב**) אם היא מקיימת את שני התנאים הבאים:

- $\leq$ הוא סדר לינארי.
- לכל תת-קבוצה $A \subseteq P$ לא ריקה יש איבר ראשון (ביחס לסדר $\leq$ המושרה מ-P).

אחד מהיתרונות של קבוצות סדורות היטב הוא בכך שקל להכליל את מושג האינדוקציה המתמטית עבורן:

משפט 4.19 (אינדוקציה מתמטית לקבוצות סדורות היטב): תהא P קבוצה סדורה היטב. אם $A \subseteq P$ היא בעלת התכונה שלכל $a \in P$, אם לכל $b < a$ מתקיים ש-$b \in A$ אז גם $a \in A$ (פורמלית: $(\forall b < a\,(b \in A)) \Rightarrow a \in A$) אז $A = P$.

הוכחה: אם $A \neq P$ אז $P \backslash A$ היא תת-קבוצה לא ריקה של P ולכן יש בה איבר ראשון a. לכל $b < a$ בהכרח $b \in A$ (שכן אם היה מתקיים $b \in P \backslash A$ זה היה עומד בסתירה להיות a מינימלי) ולכן $a \in A$, בסתירה לכך ש-$a \in P \backslash A$. ■

יתרון נוסף של קבוצות סדורות היטב הוא שכל שתי קבוצות סדורות היטב ניתנות להשוואה באמצעות איזומורפיזם: או ששתי הקבוצות איזומורפיות, או שאחת מהן איזומורפית ל"קטע התחלתי" של השניה. כדי לנסח במדויק טענה זו אנו נזקקים להגדרה:

הגדרה 4.20 תהא P קבוצה סדורה היטב. **הקטע ההתחלתי** של P הנתון על ידי $a \in P$ הוא הקבוצה $P(a) \triangleq \{x \in P | x < a\}$ (שימו לב ש-$a \notin P(a)$).

ראשית נרצה לראות כי לא ייתכן ש-P תהיה איזומורפית לקטע התחלתי שלה עצמה. לצורך כך ראשית נשים לב לעובדה הבאה:

טענה 4.21 אם $f : P \to P$ היא פונקציה משמרת סדר וחח"ע מקבוצה סדורה היטב P לעצמה, אז $a \leq f(a)$ לכל $a \in P$.

הוכחה: נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, אז הקבוצה $A = \{x \in P | f(x) < x\}$ איננה ריקה; מכיוון ש-P סדורה היטב יש בקבוצה זו איבר ראשון a. נסמן $b = f(a)$. מכך ש-$a \in A$ נקבל $b < a$. מכיוון ש-a איבר ראשון של A הרי ש-$b \notin A$ ולכן $b \leq f(b)$. מצד שני, נפעיל את f על אי השוויון $b < a$ ונקבל $f(b) < f(a) = b$, בסתירה לכך ש-$b \leq f(b)$ (מכיוון ש-f משמרת סדר אנו מקבלים $f(b) \leq f(a)$ ומכיוון ש-$b < a$ ובפרט $b \neq a$ וכך ש-f חח"ע אנחנו מקבלים $f(b) \neq f(a)$). ■

מסקנה 4.22 לא קיים איזומורפיזם מקבוצה סדורה היטב לקטע התחלתי של עצמה.

הוכחה: נניח כי קיים איזומורפיזם $f : P \to P(a)$ עבור $a \in P$ כלשהו. אז $f(a) \in P(a)$ ולכן בהכרח $f(a) < a$, בסתירה לטענה 4.21. ■

מטענה 4.21 ניתן לגזור עוד מסקנות מועילות:

מסקנה 4.23 האוטומורפיזם היחיד מקבוצה סדורה היטב A לעצמה הוא האוטומורפיזם הטריוויאלי ($f(a) = a$ לכל $a \in A$).

הוכחה: אם f אוטומורפיזם של A אז גם f וגם f^{-1} משמרות סדר, ולכן לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq f(a)$ וגם $a \leq f^{-1}(a)$; אבל על ידי הפעלת f על המשוואה השניה נקבל $f(a) \leq a$ ויחד עם המשוואה $a \leq f(a)$ ואנטי-סימטריות יחס הסדר נקבל ש-$f(a) = a$ לכל a. ■

מסקנה 4.24 עבור קבוצות סדורות היטב A, B, אם $A \cong B$ אז קיים איזומורפיזם **יחיד** ביניהן.

הוכחה: יהיו $f:A\to B$ ו-$g:A\to B$ שני איזומורפיזמים. אז $g^{-1}f:A\to A$ הוא אוטומורפיזם של A עם עצמו, ולכן הוא בהכרח האוטומורפיזם הטריוויאלי, כלומר $g^{-1}f=\mathrm{Id}_A$ ולכן $f=g$. ■

משפט 4.25 אם $f:A\to B$ איזומורפיזם של קבוצות סדורות היטב ו-$a\in A$ כלשהו ונסמן $b=f(a)$, אז $f|_{A(a)}$ הוא איזומורפיזם של $A(a)$ עם $B(b)$.

הוכחה: מכיוון ש-f איזומורפיזם, אז $f|_{A(a)}$ היא עדיין פונקציה חח"ע ומשמרת סדר. צריך להראות שהיא על $B(b)$. יהא $y\in B(b)$ כלשהו, כלומר $y\in B$ וגם $y<b$. מכיוון ש-$f:A\to B$ איזומורפיזם נובע שקיים $x\in A$ כך ש-$f(x)=y$. אם $a\le x$ אז $y=f(x)\ge f(a)=b$ וזו סתירה להנחה ש-$y<b$. מכאן ש-$x<a$ כלומר $x\in A(a)$ ולכן y שייך לתמונה של $f|_{A(a)}$ כנדרש. מכיוון שראינו ש-$f|_{A(a)}$ היא חח"ע ועל היא הפיכה וההופכית שלה מזדהה עם ההופכית של f על $B(b)$, ומכיוון שהופכית זו משמרת סדר גם ההופכית של $f|_{A(a)}$ משמרת סדר. קיבלנו ש-$f|_{A(a)}$ היא איזומורפיזם $A(a)\cong B(b)$. ■

כעת אנחנו מסוגלים להוכיח את המשפט המרכזי:

משפט 4.26 תהיינה A,B קבוצות סדורות היטב. אז מתקיים בדיוק אחד משלושת המקרים הבאים:

1. $A\cong B$.
2. קיים $a\in A$ כך ש-$A(a)\cong B$
3. קיים $b\in B$ כך ש-$A\cong B(b)$.

הוכחה: ראשית נראה כי רק אחד משלושת המקרים יכול להתקיים. אם $A\cong B$ וגם $A\cong B(b)$ אז $B\cong B(b)$ וכפי שראינו הדבר בלתי אפשרי. מאותה סיבה גם לא יכול להתקיים $A\cong B$ וגם $A(a)\cong B$.

אם קיימים a,b כך ש-$A\cong B(b)$ וגם $A(a)\cong B$ אז אם נצמצם את האיזומורפיזם $A\cong B(b)$ לקטע ההתחלתי $A(a)$ נקבל ש-$A(a)\cong B(b')$ כאשר $b'\in B(b)$. בשילוב עם $A(a)\cong B$ נקבל ש-$B\cong B(b')$ ושוב קיבלנו סתירה. לכן גם המקרה של 2,3 ביחד אינו יכול להתקיים, ולכן לכל היותר אחד משלושת המקרים 1,2,3 יכול להתקיים.

נבנה כעת באופן מפורש איזומורפיזם המתאים לאחד המקרים. נגדיר את היחס הבא: $f=\{(a,b)\,|A(a)\cong B(b)\}$.

נשים לב לכך שאם $(a_1,b)\in f$ וגם $(a_2,b)\in f$ עבור $a_1<a_2$ אז $A(a_1)\cong B(b)\cong A(a_2)$, אך $A(a_1)$ הוא קטע התחלתי של $A(a_2)$ ולכן קיבלנו סתירה ומכאן ש-f היא חד-חד-ערכית. באותו אופן מראים כי אם $b_1\neq b_2$ אז לא ייתכן ש-$(a,b_1)\in f$ וגם $(a,b_2)\in f$ ומכאן ש-f היא חד-ערכית.

נניח כעת ש-$a_1<a_2$ הם איברים של A כך שקיים $b_2\in B$ עבורו $(a_2,b_2)\in f$, כלומר $A(a_2)\cong B(b_2)$ עם איזומורפיזם שנסמן φ. כפי שראינו במשפט קודם, $\varphi|_{A(a_1)}$ נותן לנו איזומורפיזם $A(a_1)\cong B(b_1)$ כאשר $b_1\triangleq\varphi(a_1)$. מכאן ש-$(a_1,b_1)\in f$ על פי הגדרת f.

ראינו שאם $f(a_2)=b_2$, אז לכל $a_1<a_2$ קיים $b_1<b_2$ כך ש-$f(a_1)=b_1$. זה מראה בפרט ש-f היא משמרת סדר, ושאם f מוגדרת על $a\in A$ כלשהו, היא מוגדרת גם על כל $A(a)$.

באותו האופן מראים שאם $b\in B$ הוא בתמונה של f, כך גם כל $B(b)$, וש-f^{-1} משמרת סדר.

כעת נבדיל בין המקרה שבו f מוגדרת על כל A ובין המקרה שבו היא אינה מוגדרת על כל A. נתחיל מהמקרה השני. מכיוון ש-A סדורה בסדר טוב, קיים איבר מינימלי a שעליו f אינה מוגדרת. בהכרח f מוגדרת על כל $A(a)$, ואינה מוגדרת על אף איבר הגדול מ-a (כי ראינו שאם f מוגדרת על איבר, היא מוגדרת על כל האיברים הקטנים ממנו). אם התמונה של f על $A(a)$ היא B, סיימנו את המקרה הזה; נניח בשלילה שהיא לא ויהא b האיבר המינימלי ב-B שאינו בתמונה. אז כל $B(b)$ בתמונה של f, ואף איבר שאינו ב-$B(b)$ נמצא בתמונה של f, ומכאן ש-$f(A(a))=B(b)$, כלומר $A(a)\cong B(b)$ ולכן על פי הגדרה $f(a)=b$, בסתירה לכך ש-f אינה מוגדרת על a. לכן בהכרח $f(A(a))=B$ וקיבלנו $A(a)\cong B$ במקרה זה.

נניח כעת ש-f מוגדרת על כל A. או שתמונת f היא B ואז $A\cong B$, או שתמונת f אינה B, ואז יהא $b\in B$ המינימלי שאינו בתמונה ונקבל $A\cong B(b)$. ■

4.4 הגדרה ותכונות בסיסיות של סודרים

כזכור, את המספרים הטבעיים בנינו באופן הפורמלי הבא: הגדרנו $\emptyset\triangleq 0$, ובאופן אינדוקטיבי הגדרנו $n+1\triangleq n\cup\{n\}$. באופן הזה קיבלנו ש-$n=\{0,1,\dots,n-1\}$, כלומר כל מספר טבעי הוא פשוט כל המספרים הטבעיים שקדמו לו. היה זה רעיונו של גאורג קנטור שאפשר לבצע כעת קפיצה מחשבתית ולהגדיר "מספר" חדש: $\omega=\{0,1,2,\dots\}$. כלומר, ω היא בדיוק הקבוצה שמכילה את כל הטבעיים (אנו מסמנים אותה ב-ω במקום ב-$\mathbb{N}$ בשל ההקשר השונה) ולכן, אם נמשיך את האינטואיציה מהטבעיים, היא "המספר הקטן ביותר שגדול מכל הטבעיים". כעת אפשר להגדיר $\omega+1\triangleq\omega\cup\{\omega\}=\{0,1,2,\dots,\omega\}$, ובאופן כללי $\omega+n\triangleq$

$\{0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega+(n-1)\}$ וכן הלאה. זה מוביל אותנו להגדרה של $\omega+\omega \triangleq \{0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots\}$, וזה מן הסתם לא נגמר גם כאן. מהר מאוד אנו רואים שהגישה הזו, המלווה בעיקר בנפנופי ידיים, היא בעייתית; צריך לתת הגדרה קונקרטית יותר. לצורך כך נכניס לתמונה הגדרה חדשה:

הגדרה 4.27 קבוצה A היא **טרנזיטיבית** אם כל איבר שלה הוא תת-קבוצה שלה, כלומר $a \in A$ גורר $a \subseteq A$ (באופן שקול, $\bigcup A \subseteq A$, או $A \subseteq 2^A$).

ניתן להבין את שם ההגדרה מכך שאם α היא קבוצה טרנזיטיבית ומתקיים $\beta \in \alpha$ ו-$\gamma \in \beta$ אז $\gamma \in \alpha$ (כי $\beta \subseteq \alpha$). כלומר, ה"יחס" $\in$ במקרה זה הוא טרנזיטיבי (זה אינו באמת יחס שכן הוא אינו מוגדר על קבוצה מסויימת אלא על מחלקת כל הקבוצות הטרנזיטיביות).

בבירור כל $n \in \mathbb{N}$, על פי ההגדרה שלנו, הוא קבוצה טרנזיטיבית. יותר מכך: על $\mathbb{N}$ מוגדר **יחס סדר חזק** באופן הבא: $a < b$ אם ורק אם $a \in b$ (ולכן טרנזיטיביות יחס הסדר במקרה זה נובעת מטרנזיטיביות $\in$). יתר על כן, אנו יודעים שיחס הסדר על $\mathbb{N}$ הוא סדר טוב. הרעיון שעומד מאחורי סודרים הוא הכללת כל התכונות הללו, בלי להניח מראש כיצד תיראה התוצאה:

הגדרה 4.28 מספר סודר (או פשוט **סודר**) הוא קבוצה טרנזיטיבית הסדורה בסדר טוב **חזק** על ידי יחס השייכות $\in$ על אבריה.

מייד ישנן תכונות בסיסיות של סודרים שניתן לתת עליהן את הדעת:

טענה 4.29 סודרים מקיימים את התכונות הבאות:

1. $\emptyset$ היא סודר.
2. $\alpha \notin \alpha$ לכל סודר α.
3. אם α סודר, אז $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר.
4. אם α סודר ו-$\beta \in \alpha$ אז β סודר.
5. אם α, β סודרים ו-$\beta \subset \alpha$ (הכלה ממש) אז $\beta \in \alpha$.

הוכחה:

1. $\emptyset$ היא סודר באופן ריק.
2. נובע מיידית מההגדרה שכן אנו דורשים בה שהסדר ש-$\in$ מגדיר לא יהיה רפלקסיבי.
3. נניח כי α סודר ונוכיח כי $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר. בבירור $\alpha \cup \{\alpha\}$ עדיין סדורה בסדר טוב ביחס לשייכות כאשר α הוא איבר אחרון בסדר זה (כל תת-קבוצה של $\alpha \cup \{\alpha\}$, לאחר שמסירים ממנה את α אם הוא שם, היא תת-קבוצה של α ולכן קיים בה איבר ראשון כי α סדורה בסדר טוב).
נותר להראות כי $\alpha \cup \{\alpha\}$ טרנזיטיבית. אם $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ אחד משניים: או ש-$\beta \in \alpha$ ואז $\beta \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$, או ש-$\beta = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.
4. נניח כי α סודר וכי $\beta \in \alpha$. מכיוון ש-α סודר, אז $\beta \subseteq \alpha$ ולכן β יורשת מ-α את הסדר הטוב על אברי α. נותר להראות ש-β טרנזיטיבית. יהא $\gamma \in \beta$; נרצה להראות כי $\gamma \subseteq \beta$. יהא $\delta \in \gamma$ כלשהו. מטרנזיטיביות α נקבל ש-$\gamma \in \alpha$ ולכן גם $\delta \in \alpha$. כעת, מכיוון ש-$\in$ הוא סדר לינארי על α ומתקיים $\delta \in \gamma$ ו-$\gamma \in \beta$ אז מטרנזיטיביות נקבל ש-$\delta \in \beta$, כנדרש.
5. נניח כי α, β סודרים כך ש-$\beta \subset \alpha$. מכיוון ש-α סדור בסדר טוב, קיים איבר ראשון $\gamma \in \alpha \backslash \beta$. כעת, מכיוון ש-$\gamma$ הוא איבר ראשון של $\alpha \backslash \beta$, הרי שאם $x \in \gamma$ (ומטרנזיטיביות α, $x \in \alpha$) בהכרח $x \in \beta$ (כי כל איבר ב-$\alpha \backslash \beta$ גדול מ-γ ביחס הסדר $\in$) ולכן $\gamma \subseteq \beta$. מצד שני, אם $x \in \beta$ אז $x \in \alpha$ ולכן הוא בר השוואה עם γ. אם $\gamma \in x$ אז נקבל מטרנזיטיביות β ש-$\gamma \in \beta$, בסתירה לכך ש-$\gamma \in \alpha \backslash \beta$. לכן $x \in \gamma$ ולכן $\beta \subseteq \gamma$. משני הכיוונים נסיק $\beta = \gamma \in \alpha$.

■

ממה שראינו ניתן להסיק בין היתר כי ניתן לבצע את ההפרדה הבאה בין שני סוגי סודרים:

הגדרה 4.30 סודר β נקרא **סודר עוקב** אם $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ עבור סודר α כלשהו, ונסמן זאת לעתים $\beta = \alpha + 1$. אחרת β נקרא **סודר גבולי**.

הצעד הבא שלנו הוא להראות שכל סודר שווה לאיחוד כל הסודרים הקטנים ממנו, אך לצורך כך עלינו להגדיר יחס סדר על סודרים ולהראות כי כל שני סודרים הם ניתנים להשוואה.

הגדרה 4.31 יהיו α, β שני סודרים. נסמן $\alpha < \beta$ אם $\alpha \in \beta$.

טענה 4.32 לכל זוג סודרים $\alpha \neq \beta$ או ש-$\alpha < \beta$ או ש-$\beta < \alpha$.

הוכחה: נתבונן ב-$\alpha \cap \beta = \gamma$. קל לראות כי γ יורש את הסדר הטוב של α וכי הוא טרנזיטיבי (אם $\delta \in \gamma$ אז $\delta \in \alpha$ ולכן $\delta \subseteq \alpha$ ובדומה $\delta \subseteq \beta$ ולכן $\delta \subseteq \gamma$), כלומר γ סודר. נניח בשלילה כי $\alpha, \beta \neq \gamma$, אז $\gamma \in \alpha$ וגם $\gamma \in \beta$, כלומר $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$ וזו סתירה כי אף סודר אינו איבר של עצמו. מכאן ש-$\alpha = \gamma$ ולכן $\alpha \subseteq \alpha \cap \beta \subseteq \beta$, כלומר $\alpha \in \beta$, או ש-$\beta = \gamma$ ואז נקבל באותו האופן $\beta \in \alpha$. ■

מסקנה 4.33 לכל סודר α מתקיים $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$ כאשר β הוא סודר. כלומר, α הוא קבוצת כל הסודרים שקטנים ממנו.

הוכחה: כיוון אחד ברור: אם $\beta < \alpha$ אז על פי הגדרה, $\beta \in \alpha$. בכיוון השני, אם $\beta \in \alpha$ אז ראינו כי הדבר גורר ש-β סודר ולכן $\beta < \alpha$ על פי ההגדרה שלנו של $<$ עבור סודרים. ■

כעת נעסוק באיחוד וחיתוך של סודרים:

משפט 4.34 תהא C מחלקה לא ריקה כלשהי של סודרים.

1. $\bigcap C$ הוא סודר ו-$\bigcap C \in C$.
2. אם C היא קבוצה, אז $\bigcup C$ הוא סודר.

הוכחה: ברור כי $\alpha = \bigcap C$ הוא סודר שכן הוא יורש את הסדר הטוב של כל איבר ב-C. גם הטרנזיטיביות ברורה שכן אם $\beta \in \alpha$ אז β שייך לכל איבר של C ולכן מוכל בכל איבר של C ולכן מוכל ב-$\bigcap C$. מכיוון שלכל $\beta \in C$ מתקיים $\alpha \subseteq \beta$ אז $\alpha \in \beta$ לכל $\beta \in C$ כך ש-$\alpha \neq \beta$. אם $\alpha \notin C$ אז נובע מכך ש-$\alpha \in \bigcap C = \alpha$, בסתירה לכך ש-$\alpha$ סודר, ומכאן ש-$\alpha \in C$.

כדי לראות כי $\alpha = \bigcup C$ הוא סודר, ראשית נשים לב לכך שאם $\beta \in \alpha$ אז β שייך לסודר כלשהו מתוך C ולכן β מוכל בו, ולכן $\beta \subseteq \alpha$ ומכאן ש-α טרנזיטיבי. כעת, אם $x, y \in \alpha$ אז קיימים $\beta_x, \beta_y \in C$ כך ש-$x \in \beta_x$ ו-$y \in \beta_y$. בלי הגבלת הכלליות $\beta_x < \beta_y$ ולכן $x \in \beta_y$, ומכאן ש-x, y ניתנים להשוואה מאחר ו-β_y סדורה לינארית. מכאן שקיים על α סדר לינארי, ונותר להראות כי הוא סדר טוב.

תהא $A \subseteq \alpha$ כלשהי ונרצה להראות כי קיים ל-A איבר ראשון. בהכרח קיים סודר $\beta \in C$ כך ש-$A \cap \beta \neq \emptyset$ (אחרת היינו מקבלים סתירה לכך ש-$\alpha = \bigcup C$). מכיוון ש-$A \cap \beta$ היא תת-קבוצה של הסודר β קיים בה איבר ראשון $x \in A \cap \beta$. נניח בשלילה כי x אינו איבר ראשון של A, אז קיים $y \in A$ כך ש-$y < x$, כלומר $y \in x$. מכיוון ש-β טרנזיטיבית ו-$x \in \beta$ אז $y \in \beta$ ולכן $y \in A \cap \beta$, וקיבלנו סתירה לכך ש-x הוא האיבר הראשון של $A \cap \beta$. ■

מסקנה 4.35 אם C היא קבוצה לא ריקה של סודרים, אז $\inf C = \bigcap C$ ו-$\sup C = \bigcup C$. בפרט, לכל קבוצה לא ריקה של סודרים יש חסם עליון וחסם תחתון.

הוכחה: בבירור $\bigcap C$ הוא האיבר הראשון של C, שכן אם $\beta \in C$ כלשהו אז $\bigcap C \subseteq \beta$ ולכן $\bigcap C \in \beta$.

בדומה, לכל $\beta \in C$ מתקיים $\beta \subseteq \bigcup C$ ולכן $\beta \in \bigcup C$, כלומר $\bigcup C$ הוא חסם מלעיל של C; אם γ הוא חסם מלעיל אחר של C אז בפרט $\beta \in \gamma$ לכל $\beta \in C$ ולכן $\beta \subseteq \gamma$ ולכן $\bigcup C \subseteq \gamma$, כלומר $\bigcup C < \gamma$ ומכאן ש-$\bigcup C$ הוא החסם העליון של C. ■

מסקנה 4.36 קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא בעצמה סודר.

הוכחה: מכיוון שהקבוצה טרנזיטיבית וסדורה לינארית על ידי $\in$ (מטענה 4.32) די להראות שהיא סדורה בסדר טוב. אם C היא תת-קבוצה כלשהי שלה, אז $\bigcap C \in C$ הוא איבר ראשון ב-C, כנדרש. ■

מסקנה אחת מכל מה שראינו עד כה היא שאוסף כל הסודרים הוא גדול מכדי להיות קבוצה, בדומה לאופן שבו אוסף כל הקבוצות היה גדול מכדי להיות קבוצה:

משפט 4.37 (פרדוקס בורלי-פורטי): אוסף כל הסודרים איננו קבוצה.

הוכחה: נניח שאוסף כל הסודרים X היה קבוצה. אז כפי שראינו, X סדורה בסדר טוב על ידי היחס $<$ שהגדרנו על סודרים, והיא בבירור טרנזיטיבית שכן אם $\alpha \in X$ אז כל איבר של α הוא סודר ולכן שייך גם כן ל-X. מכאן ש-X עצמה היא סודר ולכן $X \in X$, בסתירה לכך שסודר אינו יכול להיות איבר של עצמו. ■

אוסף כל הסודרים ייקרא אם כן **מחלקה**. נסמן אותו ב-Ord. כאשר נתייחס אליו זה יהיה פשוט קיצור לדיבור על "כל הסודרים"; כך למשל לומר שתכונה כלשהי מתקיימת עבור כל Ord היא דרך אחרת לומר שהתכונה מתקיימת לכל הסודרים.

כעת נוכל לתאר במפורש את התכונה המרכזית של הסודרים:

משפט 4.38 תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה היטב כלשהי. אז קיים סודר יחיד $\alpha \in \mathrm{Ord}$ כך ש-$P \cong \alpha$.

הוכחה: יחידות נובעת מטרנזיטיביות האיזומורפיזם: אם $P \cong \alpha$ ו-$P \cong \beta$ אז $\alpha \cong \beta$. אם $\alpha \neq \beta$ אז מטענה 4.32 נובע בלי הגבלת הכלליות ש-$\alpha < \beta$, כלומר $\alpha \in \beta$ ולכן $\alpha = \beta(\alpha)$ (כלומר, α הוא הקטע ההתחלתי של β הכולל את כל הסודרים הקטנים מ-α). קיבלנו ש-β איזומורפית לקטע התחלתי שלה עצמה, בסתירה למסקנה 4.22.

נעבור להוכחת קיום. נגדיר על P פונקציה $f : P \to \mathrm{Ord}$ כך שלכל $x \in P$, אם קיים סודר α כך ש-$P(x) \cong \alpha$ אז $f(x) = \alpha$ ואחרת $f(x)$ אינה מוגדרת. נסמן $A = \mathrm{dom}f$ - קבוצת האיברים ב-P שעליהם f מוגדרת, ו-$B = f(A)$. B היא קבוצה על פי אקסיומת ההחלפה. נשים לב לכך שהיא טרנזיטיבית: אם $\alpha \in B$ אז קיים $x \in A$ כך ש-$P(x) \cong \alpha$. כעת, אם $\gamma \in \alpha$, האיזומורפיזם בין α ו-$P(x)$ כשהוא מצומצם ל-γ הוא איזומורפיזם של γ עם קטע התחלתי כלשהו של P, כך ש-$\gamma \in B$. מכך ש-B היא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים עולה שהיא בעצמה סודר, שנסמן β.

כעת נוכיח כי $\beta \cong A$ כאשר האיזומורפיזם נתון על ידי f. בבירור f על שכן $f(A) = \beta$ על פי הגדרה. ברור כי היא חח"ע מכיוון שאם $P(x) \cong \alpha \cong P(y)$ עבור $x \neq y$ נקבל קבוצה שאיזומורפית לקטע התחלתי של עצמה. f משמרת סדר כי אם $x < y$ אבל $f(y) \leq f(x)$ נקבל ש-$P(y) \cong f(y)$ איזומורפי לקטע התחלתי של $P(x) \cong f(x)$, בסתירה לכך ש-$P(x)$ הוא קטע התחלתי של $P(y)$.

נותר להראות כי $A = P$. אחרת, יהא x האיבר המינימלי ב-P שאינו שייך ל-A. אז $f(P(x))$ הוא סודר מאותם נימוקים לפיהם B הייתה סודר, ולכן $P(x)$ איזומורפי לסודר ו-$x \in A$, כנדרש. ■

משפט זה הוא חשוב ביותר; הוא מצביע על כך שניתן לתאר בצורה קנונית את הסדר הטוב של קבוצה כלשהי באמצעות סודרים. בשל כך ניתן לתאר באופן לא פורמלי את הסודרים בתור נציגים של מחלקות השקילות המושרות מיחס השקילות $\cong$ של איזומורפיזם של קבוצות סדורות. זו אינה הגדרה פורמלית בתורת הקבוצות של ZF שכן מחלקות השקילות אינן קבוצות שכן הן גדולות מדי.

הגדרה 4.39 תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה היטב. **טיפוס הסדר** של $(P, \leq)$ הוא הסודר היחיד שאיזומורפי ל-$(P, \leq)$.

4.5 אינדוקציה ורקורסיה על-סופיות

כעת, משהבנו מעט את המבנה של אוסף כל הסודרים, נעבור לאופן שבו ניתן להשתמש בהם. היעד הראשון שלנו הוא הכללת מושגים מוכרים עבור הטבעיים: הוכחה באינדוקציה והגדרה רקורסיבית. נתחיל באינדוקציה.

אינדוקציה מתמטית רגילה מנוסחת כך: אם קבוצה A מקיימת ש-$0 \in A$, ושאם $n \in A$ אז גם $n + 1 \in A$, אז $A = \mathbb{N}$. עבור סודרים נצטרך להוסיף גם התייחסות לסודרים גבוליים, שאינם מתקבלים בתור $\alpha + 1$; כמו כן הניסוח יהיה מעט שונה מכיוון ש-Ord היא מחלקה שאיננה קבוצה.

משפט 4.40 (אינדוקציה על-סופית) אם C היא מחלקה כלשהי של סודרים כך ש:

1. $0 \in C$
2. אם $\alpha \in C$ אז $\alpha + 1 \in C$
3. אם עבור סודר גבולי $\beta \neq 0$ מתקיים ש-$\alpha \in C$ לכל $\alpha < \beta$, אז $\beta \in C$

אז $C = \mathrm{Ord}$.

הוכחה: נניח כי $C \neq \mathrm{Ord}$ ונתבונן ב-$\overline{C}$: מחלקת הסודרים שאינם ב-C. כפי שראינו, קיים בה איבר ראשון $\beta = \inf\overline{C} = \bigcap\overline{C}$. מכיוון ש-$0 \in C$ הרי ש-$\beta \neq 0$. אם $\beta = \alpha + 1$ עבור α כלשהו אז $\alpha < \beta$ ולכן $\alpha \in C$ ומכאן ש-$\beta \in C$; אחרת β הוא סודר גבולי ובהכרח לכל $\alpha < \beta$ מתקיים $\alpha \in C$ ולכן $\beta \in C$. ■

לעתים במקום להוכיח במפורש את תנאי 2 נעדיף להוכיח את תנאי 3 עבור כל הסודרים השונים מ-0.

כוחה של אינדוקציה על-סופית היא בהוכחת טענות על אובייקטים מתמטיים שמתוארים באמצעות סודרים. האובייקט ה"קלאסי" שמתואר באמצעות מספרים טבעיים הוא סדרה: $a_0, a_1, a_2, \ldots$, שראינו כי ניתן לחשוב עליה כפונקציה $f : \mathbb{N} \to A$. ניתן להשתמש בסודרים כדי להכליל מושג זה:

הגדרה 4.41 סדרה על-סופית מאורך $\alpha \in \mathrm{Ord}$ היא פונקציה $f : \alpha \to A$ עבור קבוצה A כלשהי. לרוב נסמן סדרה על-סופית כ-$\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$ (הסוגריים המשולשים מעידים על חשיבות לסדר).

בהגדרה זו, סדרה אינסופית "רגילה" היא פשוט סדרה על-סופית מאורך ω, ואילו עבור סדרה סופית מאורך n המשמעות האינטואיטיבית מזדהה עם המשמעות הפורמלית.

ישנן שתי דרכים מקובלות להגדיר סדרות: הראשונה, על ידי כתיבה מפורשת של אבריהן. למשל, הסדרה האינסופית $a_n = n$. הדרך השניה היא באמצעות **רקורסיה**. ברקורסיה, כל איבר בסדרה מוגדר באמצעות פונקציה של כל האיברים שקדמו לו. כך למשל **סדרת פיבונאצ'י** מוגדרת בתור $a_0 = 0, a_1 = 1$ ו-$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ עבור $n > 1$. ניתן לכתוב זאת כפונקציה מפורשת באופן הבא:

$$F\left(\{a_k\}_{k<n}\right) = \begin{cases} 0 & \langle a_k \rangle_{k<n} = \{\} \\ 1 & \langle a_k \rangle_{k<n} = \langle a_0 \rangle \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \langle a_k \rangle_{k<n} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \rangle \end{cases}$$

זוהי דרך הצגה מבלבלת למדי במבט ראשון. F מוגדרת כפונקציה על סדרות סופיות; התחום שלה הוא קבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים מאורך $n < \omega$.

הגדרה 4.42 הגדרה **ברקורסיה על-סופית** של סדרה $\langle a_\alpha \rangle$ מתבצעת על ידי פונקציה F שתחומה V כך שלכל סודר α, $a_\alpha = F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}\right)$.

משפט 4.43 בהינתן פונקציה $F : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, קיימת ויחידה סדרה $\langle a_\alpha \rangle$ המקיימת $a_\alpha = F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}\right)$.

הוכחה: יש להוכיח כי בהינתן F אכן קיימת סדרה שכזו, וכי היא יחידה.

לצורך פשטות נשתמש בסימון $a_\alpha = S(\alpha)$; כעת ניתן לחשוב על S כעל פונקציה שתחומה Ord ומקיימת $S(\alpha) = F\left(S|_\alpha\right)$. עלינו להראות כי S מוגדרת לכל α, וכי היא יחידה (שימו לב לכך ש-S איננה קבוצה שכן היא פונקציה שתחומה Ord, ולכן לא ניתן להוכיח את קיום S; תחת זאת אנו מראים כי $F\left(S|_\alpha\right)$ קיים ויחיד לכל סודר α וזה אפשרי מאחר ו-$S|_\alpha$ היא קבוצה על פי אקסיומת ההחלפה).

יחידות S קלה להוכחה באמצעות אינדוקציה על-סופית: תהא S' פונקציה על Ord המקיימת $S'(\alpha) = F\left(S'|_\alpha\right)$ ונוכיח כי $S(\alpha) = S'(\alpha)$ לכל סודר α.

די להראות כי לכל סודר α, אם $S(\beta) = S'(\beta)$ לכל $\beta < \alpha$ אז $S(\alpha) = S'(\alpha)$.

ראשית נשים לב לכך שאם $S(\beta) = S'(\beta)$ לכל $\beta < \alpha$ אז

$$S|_\alpha = \{(\beta, S(\beta)) \mid \beta < \alpha\} = \{(\beta, S'(\beta)) \mid \beta < \alpha\} = S'|_\alpha$$

ולכן:

$$S(\alpha) = F\left(S|_\alpha\right) = F\left(S'|_\alpha\right) = S'(\alpha)$$

נותר להוכיח כי $S(\alpha)$ אכן מוגדרת לכל α. לצורך כך עלינו לתת הגדרה מפורשת ל-$S(\alpha) = x$ בתור פסוק (שכן זו המשמעות הפורמלית של פונקציה המוגדרת על מחלקה). נגדיר את $S(\alpha) = x$ בתור הנוסחה:

$$\exists \langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha} \left[\forall \gamma < \alpha \left(a_\gamma = F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma}\right)\right) \wedge x = F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}\right)\right]$$

אם $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$ היא סדרה המקיימת את התנאי $\forall \gamma < \alpha \left(a_\gamma = F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma}\right)\right)$ הרי שהיא יחידה (אותה הוכחה כמו הוכחת יחידות S כולה) ולכן $F(\alpha)$, אם היא מוגדרת, מוגדרת באופן יחיד; נותר להראות כי $F(\alpha)$ אכן מוגדרת, כלומר שהסדרה $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$ קיימת בכלל. גם הוכחת קיום זו היא באינדוקצייה על-סופית.

עבור $\alpha = 0$, $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha} = \emptyset$ וקיום $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$ נובע מאקסיומת הקבוצה הריקה.

עבור $\alpha + 1$, אם נניח את קיום $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$, הרי ש-$\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha+1} = \langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha} \cup \left\{ \left(\alpha, F\left(\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha} \right) \right) \right\}$, ולכן הקיום נובע במקרה זה מאקסיומות האיחוד והזיווג.

עבור α גבולי, אם נניח את קיום $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma}$ לכל $\gamma < \alpha$, הרי ש-$\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha} = \bigcup \left\{ \langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma} \right\}$,ולכן הקיום נובע במקרה זה מאקסיומות האיחוד וההחלפה (החלפה נדרשת על מנת להראות כי הקבוצה $\left\{ \langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma} \right\}$ קיימת; זה נעשה על ידי הפונקציה $\gamma \mapsto \langle a_\beta \rangle_{\beta<\gamma}$ שתחומה הוא הסודר α). ■

4.6 חשבון סודרים

4.6.1 הגדרה

השימוש המיידי שניתן לעשות ברקורסיה על-סופית הוא הכללה של פעולות החשבון על מספרים טבעיים לפעולות חשבון על סודרים כלליים.

ראשית נציג סימון מקוצר אלגנטי לשימוש:

הגדרה 4.44 (גבול של סדרת סודרים) אם $\langle a_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$ היא סדרה של סודרים כך ש- $\gamma < \beta$ גורר $a_\beta \le a_\gamma$ (כלומר, זוהי סדרה **מונוטונית לא יורדת**), אז נסמן $\lim_{\beta\to\alpha} a_\beta = \sup \{a_\beta | \beta < \alpha\}$ (זכרו כי החסם העליון של כל קבוצת סודרים תמיד קיים, על פי מסקנה 4.35).

כעת נפנה להגדרת הפעולות החשבוניות.

הגדרה 4.45 (**חיבור סודרים**) לכל סודר α נגדיר:

- $\alpha + 0 \triangleq \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) \triangleq (\alpha + \beta) + 1$
- אם $\beta > 0$ סודר גבולי, אז $\alpha + \beta \triangleq \lim_{\gamma\to\beta} \alpha + \gamma$

הגדרה 4.46 (**כפל סודרים**) לכל סודר α נגדיר:

- $\alpha \cdot 0 \triangleq 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) \triangleq \alpha \cdot \beta + \alpha$
- אם $\beta > 0$ סודר גבולי, אז $\alpha \cdot \beta \triangleq \lim_{\gamma\to\beta} \alpha \cdot \gamma$

הגדרה 4.47 (**חזקה של סודרים**) לכל סודר α נגדיר:

- $\alpha^0 \triangleq 1$
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- אם $\beta > 0$ סודר גבולי, אז $\alpha^\beta \triangleq \lim_{\gamma\to\beta} \alpha^\gamma$

שימו לב כי הגדרת החזקה מובילה לכפל משמעות בסימונים, שהרי הגדרנו כבר כי עבור שתי קבוצות A, B, הסימון A^B פירושו קבוצת הפונקציות מ-B ל-A. עם זאת, מכיוון שחזקה של סודרים אינה פעולה נפוצה במיוחד, נמשיך להשתמש בסימון α^β ונוודא שיהיה ברור מההקשר שכוונתנו לחזקה של סודרים (כל עוד ברור כי אנו מצפים שגם α^β יהיה סודר, ברור שהכוונה כאן היא לחזקה של סודרים).

4.6.2 הגדרה שקולה

ניתן להגדיר חיבור וכפל של סודרים גם באופן ישיר ולא אינדוקטיבי ; הגדרה דומה עבור החזקה היא מסובכת יותר ולא נציג אותה כאן.

משפט 4.48 יהיו $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ קבוצות סדורות היטב עם טיפוסי הסדר α, β בהתאמה. נניח ש-$A \cap B = \emptyset$.

- הסודר $\alpha + \beta$ הוא טיפוס הסדר של הקבוצה $A \cup B$ עם יחס הסדר $\leq \triangleq \leq_A \cup \leq_B \cup A \times B$.
- הסודר $\alpha \cdot \beta$ הוא טיפוס הסדר של הקבוצה $A \times B$ עם יחס הסדר הלקסיקוגרפי ההפוך : $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ אם ורק אם $a_2 < b_2$ או $a_2 = b_2$ ו-$a_1 \leq b_1$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על-סופית על טיפוס הסדר של B. נתחיל עם חיבור.
אם טיפוס הסדר של B הוא 0 (מקרה 1 של אינדוקציה על-סופית) אז $B \cong 0 = \emptyset$ ולכן $B = \emptyset$. מכאן ש-$A \cup B = A$ ויחס הסדר על $A \cup B$ הוא יחס הסדר על A, כך שטיפוס הסדר של $A \cup B$ הוא α - טיפוס הסדר של A, בהתאם להגדרה הרקורסיבית לפיה $\alpha + 0 = \alpha$.
אם טיפוס הסדר של B הוא סודר עוקב, נסמן אותו ב-$\beta + 1$. כלומר, $B \cong \beta + 1$. על פי הגדרה, $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$ כך ש-β הוא האיבר המקסימלי של $\beta + 1$. יהא $b \in B$ האיבר שאליו האיזומורפיזם מעביר את β, אז נסמן $B' = B \backslash \{b\}$ כך ש-$B' \cong \beta$. מכיוון שהאיזומורפיזם משמר סדר, b הוא האיבר המקסימלי של B.
על פי הגדרת יחס הסדר על $A \cup B$ נקבל ש-b הוא איבר מקסימלי גם בקבוצה זו. כעת, מהנחת האינדוקציה נקבל שטיפוס הסדר של $A \cup B'$ הוא $\alpha + \beta$, ולכן טיפוס הסדר של $A \cup B$ הוא $(\alpha + \beta) + 1$ כאשר האיזומורפיזם מתקבל מלקיחת האיזומורפיזם של $A \cup B'$ עם $\alpha + \beta$ והעברת b אל $\alpha + \beta$. קיבלנו התאמה להגדרה הרקורסיבית לפיה $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.
אם טיפוס הסדר של B הוא סודר גבולי $\beta \neq 0$, אז נניח שלכל $\gamma < \beta$ מתקיימת הטענה. כלומר, אם טיפוס הסדר של C כלשהי הוא γ אז טיפוס הסדר של $A \cup C$ הוא $\alpha + \gamma$. נסמן את טיפוס הסדר של $A \cup B$ ב-δ ונוכיח ש-$\delta = \sup \{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.
ראשית נוכיח כי δ היא חסם מלעיל של $\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$. יהא $\gamma < \beta$. אז γ איזומורפי לקטע התחלתי של β. מכיוון ש-$B \cong \beta$ הרי ש-γ איזומורפי לקטע התחלתי $C \cong \gamma$ של B. כל איבר של $B \backslash C$ גדול מכל איבר של C מהגדרת קטע התחלתי, ולכן כל איבר של $B \backslash C$ גדול מכל איבר של $A \cup C$. מכאן ש-$A \cup C$ היא קטע התחלתי של $A \cup B$. מהנחת האינדוקציה, טיפוס הסדר של $A \cup C$ הוא $\alpha + \gamma$, כך שראינו שיש איזומורפיזם מ-$\alpha + \gamma$ אל קטע התחלתי של δ, ומכאן ש-$\alpha + \gamma < \delta$.
נראה כעת כי δ הוא הקטן ביותר מבין כל החסמים מלעיל של $\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$. יהא δ' סודר כלשהו כך ש-$\delta' < \delta$. מכיוון ש-δ' הוא קטע התחלתי של δ ו-δ הוא טיפוס הסדר של $A \cup B$, נקבל ש-δ' איזומורפי לקטע התחלתי של $A \cup B$. נבדיל בין שתי אפשרויות :

- δ' איזומורפי לקטע התחלתי של A : במקרה זה δ' איזומורפית לקטע התחלתי של טיפוס הסדר של A, כלומר $\delta' < \alpha = \alpha + 0$. קיבלנו ש-δ' איננו חסם מלעיל של הקבוצה $\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.
- δ' איזומורפי ל-$A \cup C$ כך ש-C קטע התחלתי של B : נסמן את טיפוס הסדר של C ב-γ ומהנחת האינדוקציה נקבל שטיפוס הסדר של $A \cup C$ הוא $\alpha + \gamma = \delta'$. לכן על פי הגדרה $\delta' < (\alpha + \gamma) + 1 = \alpha + (\gamma + 1)$. מכיוון ש-$\beta$ גבולי ו-$\gamma < \beta$ אז $\gamma + 1 < \beta$, ומכאן שוב קיבלנו ש-δ' איננו חסם מלעיל של $\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

משני אלו נסיק שאם $\delta' < \delta$ אז δ' איננו חסם מלעיל של $\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$ ולכן δ הוא חסם המלעיל הקטן ביותר של קבוצה זו.
ההוכחה עבור כפל דומה. נתמקד בשלב האינדוקציה עבור סודר עוקב. נניח כי טיפוסי הסדר של A, B הם α ו-$\beta + 1$ בהתאמה ונרצה להוכיח שטיפוס הסדר של $A \times B$ עם סדר לקסיקוגרפי הפוך הוא $\alpha \cdot \beta + \alpha$. לצורך כך יהא $b \in B$ האיבר המקסימלי ב-B, נסמן $B' = B \backslash \{b\}$ ונקבל ש-$B' \cong \beta$. על פי הנחת האינדוקציה, טיפוס הסדר של $A \times B'$ הוא $\alpha \cdot \beta$.
כעת נשים לב לכך ש-$A \times B = A \times B' \cup A \times \{b\}$. יתר על כן, על פי הגדרת סדר לקסיקוגרפי **הפוך**, כל איבר של $A \times \{b\}$ גדול מכל איבר של $A \times B'$. מכיוון ש-$A \cong A \times \{b\}$ באופן טריוויאלי, טיפוס הסדר של $A \times \{b\}$ הוא α, ומהטענה שראינו עבור חיבור נובע כעת שטיפוס הסדר של $A \times B$ הוא $\alpha \cdot \beta + \alpha$ כנדרש. ■

4.6.3 תכונות של פעולות החשבון

חלק מהתכונות שמתקיימות עבור פעולות החשבון במספרים הטבעיים משתמרות גם עבור הסודרים :

משפט 4.49 יהיו α, β, γ סודרים כלשהם.

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (אסוציאטיביות החיבור)
2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (אסוציאטיביות הכפל)

3. אם $\beta < \gamma$ אז $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ (מונוטוניות החיבור)

4. אם $\beta < \gamma$ ו-$\alpha > 0$ אז $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ (מונוטוניות הכפל)

5. אם $\beta < \gamma$ ו-$\alpha > 1$ אז $\alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}$ (מונוטוניות החזקה)

6. אם $\alpha < \beta$ אז קיים סודר יחיד δ כך ש-$\alpha + \delta = \beta$ (הפרש סודרים)

7. אם $\beta > 0$ אז קיימים סודרים δ, ρ יחידים כך ש-$\rho < \beta$ ו-$\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$ (חלוקה עם שארית של סודרים)

8. אם $\alpha > 1$ אז $\beta \leq \alpha^{\beta}$

הוכחה: את מרבית הטענות ניתן להוכיח באינדוקציה על-סופית.
עבור 6, δ הוא טיפוס הסדר של הקבוצה הסדורה היטב $\{\gamma \mid \alpha \leq \gamma < \beta\}$. עבור 7, δ הוא הסודר הגדול ביותר כך ש-$\beta \cdot \delta \leq \alpha$.
■

לעומת זאת, קומוטטיביות אינה מתקיימת:

- למשל, $\omega + 1$ הוא הסודר העוקב של ω (כלומר, הקבוצה $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$) אך $1 + \omega = \sup\{1, 2, 3, \ldots\} = \omega$.
- בדומה, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$, אך $2 \cdot \omega = \sup\{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \omega$.

לסיום, אפשר להשתמש בפעולות החיבור, הכפל והחזקה כדי לתת הצגה "קנונית" לכל הסודרים:

משפט 4.50 (הצורה הנורמלית של קנטור): לכל סודר $\alpha > 0$ קיימת הצגה יחידה מהצורה

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n$$

כאשר $n \geq 1$ הוא מספר טבעי של מחוברים, $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ הם סודרים ו-$k_1, \ldots, k_n$ הם טבעיים חיוביים.

הוכחה: נניח כי לכל סודר קטן מ-α קיימת צורה נורמלית כנ"ל ונוכיח עבור α. מכיוון ש-$\alpha > 0$ אז $\omega^0 \leq \alpha$. לכן ניתן להגדיר את β בתור הסודר הגדול ביותר המקיים $\omega^{\beta} \leq \alpha$. קיים כזה כי $\alpha \leq \omega^{\alpha}$ ולכן הקבוצה $\{\beta \mid \omega^{\beta} \leq \alpha\}$ היא חסומה מלעיל וניתן להראות שהחסם העליון שלה יהיה שייך אליה. נשתמש בחלוקה עם שארית ונקבל שקיימים δ, ρ כך ש-$\alpha = \omega^{\beta} \cdot \delta + \rho$ כך ש-$\rho < \omega^{\beta} \leq \alpha$. בהכרח δ הוא מספר טבעי אחרת היינו מקבלים ש-$\alpha < \omega^{\beta+1} = \omega^{\beta} \cdot \omega \leq \omega^{\beta} \cdot \delta$. מכיוון ש-$\rho < \alpha$ ניתן להמשיך את ההוכחה עליו באינדוקציה.
■

אפשר לחשוב על משפט הצורה הנורמלית של קנטור בתור תיאור של מספרים סודרים "בבסיס ω", כאשר המקדמים הם מספרים טבעיים כלשהם. עם זאת, לא תמיד הצגה של סודר בצורה הנורמלית של קנטור מפשטת את העניינים; קיימים סודרים עבורם $\alpha = \omega^{\alpha}$, כך שהצורה הנורמלית של קנטור לא מפשטת אותם עבורנו.

4.7 אקסיומת הבחירה, הלמה של צורן ומשפט הסדר הטוב

משפט 4.26 מראה כי כל שתי קבוצות סדורות היטב ניתנות להשוואה מבחינת עוצמתן. לעומת זאת, עבור שתי קבוצות שלא קיים עליהן סדר טוב לא הוכחנו כי בהכרח ניתן להשוות את עוצמותיהן; ייתכנו קבוצות A, B כך שאין פונקציה חח"ע לא מ-A אל B ולא מ-B אל A, אף שאינטואיטיבית נראה לנו כי אחד משניהם חייב להתקיים. פתרון אחד לבעיה זו הוא להגדיר סדר טוב על שתי הקבוצות ואז להשוות ביניהן בעזרת משפט 4.26. יש שתי בעיות בגישה זו: הראשונה, שצריך להראות שההשוואה שנקבל אינה תלויה בסדרים הספציפיים שנגדיר על הקבוצות; בבעיה זו נטפל בהמשך.
הבעיה השניה היא להוכיח שקיים סדר טוב על כל קבוצה A:

משפט 4.51 (משפט הסדר הטוב): לכל קבוצה A קיים יחס סדר טוב על A.

תוצאה זו היא חזקה באופן מפתיע: היא אומרת, למשל, שעל $\mathbb{R}$ קיים סדר טוב, למרות שאם ננסה באופן נאיבי למצוא סדר טוב שכזה ניתקל מהר מאוד בקשיים מהותיים. ההוכחה עצמה תסתמך על משפט אחר:

משפט 4.52 (אקסיומת הבחירה): לכל משפחה $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות קיימת פונקציה $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ כך ש-$f(A) \in A$ לכל $A \in \mathcal{F}$.

אקסיומת הבחירה אומרת כי בהינתן אוסף כלשהו של קבוצות לא ריקות, ניתן "לבחור" איבר אחד מכל אחת מהקבוצות; הפונקציה f נקראת **פונקציית בחירה** עבור $\mathcal{F}$. תוצאה זו נראית מובנת מאליה במבט ראשון, אך יש לזכור כי $\mathcal{F}$ היא משפחה **כלשהי** של קבוצות, אשר יכולה להיות גם גדולה מאוד, ולא בהכרח נוכל להגדיר את f באמצעות כלל כלשהו.

למשל, אם $\mathcal{F}=2^{\mathbb{N}}\backslash\{\emptyset\}$, אז פונקציית בחירה f עבור $\mathcal{F}$ היא $f(A)=\min A$.

אם $\mathcal{F}=2^{\mathbb{Z}}\backslash\{\emptyset\}$ אז התעלול כבר לא יעבוד כי לא לכל קבוצה של שלמים יש מינימום, אבל ניתן לעשות תעלול דומה: $f(A)=\min\arg_{a\in A}\{|a|\}$, כלומר לבחור איבר שהוא מינימלי בערכו המוחלט (ייתכן שיהיו שניים כאלו - a ו-$-a$, ואז אפשר שרירותית לקבוע שבוחרים את החיובי מביניהם).

אם $\mathcal{F}=2^{\mathbb{Q}}\backslash\{\emptyset\}$ גם התעלול הזה לא עובד, אבל ניתן לנקוט בתעלול דומה: לבחור את האיבר $\frac{a}{b}$ בתוך A כך ש-$|a|$ הוא מינימלי מבין המונה בכל האיברים שעבורם $|b|$ הוא מינימלי.

לעומת זאת, אם $\mathcal{F}=2^{\mathbb{R}}\backslash\{\emptyset\}$ כבר לא ברור אילו תעלולים יעבדו; איבדנו את היכולת לתת תיאור "פשוט" לאברי הקבוצות שלנו, ולכן קשה גם לתת כלל פשוט שבוחר איבר לכל אחת מהקבוצות.

נראה כעת כיצד אקסיומת הבחירה שימושית בהוכחת משפט הסדר הטוב. ראשית, נחשוב כיצד ניגש באופן נאיבי להוכחה: אם נתונה לנו קבוצה סופית ואנו רוצים להגדיר סדר על אבריה, אפשר פשוט לבחור שרירותית איבר כלשהו שיהיה הראשון, לאחר מכן לבחור איבר אחר שיהיה השני, לבחור שוב איבר שטרם בחרנו כך שיהיה השלישי, וכן הלאה. גישה זו נתקלת בבעיות כאשר רוצים להשתמש בה עבור קבוצה כללית: ראשית, בתהליך שתיארנו כאן יש רק מספר בן מניה של צעדים. זו אינה בעיה של ממש כי ניתן להשתמש ברקורסיה על-סופית כדי להכליל את התהליך. הבעיה העיקרית היא שיש לבצע בחירה עבור כמות גדולה של קבוצות, ולשם כך נדרשת אקסיומת הבחירה.

משפט 4.53 אקסיומת הבחירה גוררת את משפט הסדר הטוב.

הוכחה: נניח את נכונות אקסיומת הבחירה. תהא A קבוצה כלשהי ונרצה להגדיר סדר טוב על A. תהא $f:2^{A}\backslash\emptyset\to A$ פונקציית בחירה על כל תת-הקבוצות של f שאינן ריקות.

נגדיר סדרה $\langle a_{\alpha}\rangle$ ברקורסיה על-סופית, באמצעות הפונקציה $F\left(\langle a_{\beta}\rangle_{\beta<\alpha}\right)=f\left(A\backslash\{a_{\beta}|\beta<\alpha\}\right)$. נשים לב כי ההגדרה תקפה רק עבור סודרים α שעבורם $A\neq\{a_{\beta}|\beta<\alpha\}$; ניתן להגדיר את F להיות איבר שרירותי כלשהו של A עבור סודרים גדולים יותר.

בהכרח קיים סודר α כך ש-$A=\{a_{\beta}|\beta<\alpha\}$ שכן אחרת נקבל התאמה חח"ע $A\to\mathrm{Ord}$ על ידי $\beta\mapsto a_{\beta}$, בסתירה לכך ש-A היא קבוצה.

קיבלנו אם כן התאמה חח"ע ועל בין הקבוצה הסדורה היטב α ו-A. התאמה זו משרה יחס סדר טוב על A. ■

הכיוון השני פשוט בהרבה:

משפט 4.54 משפט הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה.

הוכחה: תהא $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות לא ריקות. לכל $A\in\mathcal{F}$ קיים סדר טוב על $\bigcup\mathcal{F}$; נגדיר את $f(A)$ להיות האיבר המינימלי בתת הקבוצה של $\bigcup\mathcal{F}$ שכוללת את כל אברי A. ■

נעבור כעת לתוצאה נוספת הנוגעת לקבוצות סדורות והיא שימושית ביותר בתחומים רבים של המתמטיקה:

משפט 4.55 (הלמה של צורן): תהא X קבוצה סדורה חלקית לא ריקה. אם לכל שרשרת של X קיים חסם מלעיל ב-X, אז קיים ב-X איבר מקסימלי.

נציג שימוש סטנדרטי לדוגמה בלמה של צורן, שדורש ידע בסיסי באלגברה לינארית:

משפט 4.56 יהא V מרחב וקטורי מעל שדה כלשהו ו-$A\subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. אז ניתן להרחיב את A לבסיס של V. בפרט עבור $A=\emptyset$ נובע שלכל מרחב וקטורי V קיים בסיס.

הוכחה: נגדיר את P בתור אוסף כל תת-הקבוצות $B\subseteq V$ שהן בלתי תלויות לינארית ו-$A\subseteq B$. אז $(P,\subseteq)$ היא קבוצה סדורה חלקית עם יחס הסדר הרגיל של הכלת קבוצות.

תהא $\mathcal{C}\subseteq P$ שרשרת לא ריקה ונגדיר $C=\bigcup\mathcal{C}$. אז $A\subseteq C$ (שכן $A\subseteq B$ לכל $B\in\mathcal{C}$). כמו כן, C בלתי תלויה לינארית שכן אם $\lambda_{1}x_{1}+\cdots+\lambda_{n}x_{n}=0$ עבור $x_{1},\ldots,x_{n}\in C$ ו-$\lambda_{1},\ldots\lambda_{n}$ איברים שונים מאפס בשדה, אז נגדיר C_{i} להיות איבר ב-$\mathcal{C}$ כך ש-$x_{i}\in C_{i}$. מכיוון ש-$\mathcal{C}$ סדורה לינארית, קיים k כך ש-$C_{i}\subseteq C_{k}$ לכל $1\le i\le n$ ולכן $\lambda_{1}x_{1}+\cdots+\lambda_{n}x_{n}=0$ מראה שכבר C_{k} היא קבוצה תלויה לינארית, בסתירה להגדרת P. מכאן ש-$C\in P$ והוא חסם מלעיל של השרשרת $\mathcal{C}$.

מהלמה של צורן נסיק כעת כי קיים איבר מקסימלי $B\in P$. מכיוון ש-$B\in P$ הרי ש-B בלתי תלויה לינארית ו-$A\subseteq B$; נותר להוכיח כי B פורשת את V. נניח בשלילה כי קיים $v\in V$ שאינו ניתן להצגה כצירוף לינארי של אברי B, אז $B\cup\{v\}$ היא קבוצה

בלתי תלויה לינארית המכילה את A ו-$B \subset B \cup \{v\}$, בסתירה למקסימליות B. מכאן ש-B היא קבוצה פורשת ולכן בסיס, כנדרש.
■

נציג כעת הוכחה ללמה של צורן מתוך אקסיומת הבחירה:

משפט 4.57 אקסיומת הבחירה גוררת את הלמה של צורן.

הוכחה: תהא $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית בה לכל שרשרת קיים חסם מלעיל. נבנה שרשרת באופן אינדוקטיבי; נתחיל מהקבוצה הריקה, ובכל צעד של האינדוקציה נוסיף לקבוצה שלנו איבר הגדול מכל האיברים שבקבוצה עד כה. נקבל פונקציה חח"ע מ-Ord ל-P ומכיוון ש-P קבוצה בהכרח הבניה תהיה חייבת להסתיים מתישהו והאיבר האחרון בה יהיה האיבר המקסימלי.

פורמלית, נגדיר ברקורסיה על-סופית את הסדרה a_α כך שלכל סודר α, a_α הוא איבר של P המקיים $a_\alpha > a_\beta$ לכל $\beta < \alpha$, אם קיים כזה. לצורך הגדרה פורמלית של סדרה זו אנו נזקקים לאקסיומת הבחירה.

נשים לב לכך שאם α הוא סודר גבולי, אז הקבוצה $\{a_\beta | \beta < \alpha\}$ היא שרשרת ב-P ולכן קיים לה חסם מלעיל, כך שקיומו של a_α מובטח תמיד לכל סודר גבולי α. אם קיום a_α היה מובטח גם לכל סודר לא גבולי היינו מקבלים פונקציה חח"ע מ-Ord ל-P, בסתירה לכך ש-P קבוצה; מכאן שקיים סודר α כך שלא קיים ב-P איבר גדול מ-a_α, ומכאן ש-a_α הוא האיבר המקסימלי המבוקש. ■

כוחה של הלמה של צורן מתבטא בכך שהיא למעשה שקולה לאקסיומת הבחירה:

משפט 4.58 הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה.

הוכחה: ההוכחה היא עוד דוגמה ליישום סטנדרטי של הלמה של צורן. תהא $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות לא ריקות ונבנה פונקצית בחירה עבור $\mathcal{F}$ באופן הבא: ראשית נגדיר קבוצה P של כל הפונקציות f שהן פונקציות בחירה על תתי-קבוצות $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ ונשרה עליה את יחס סדר ההכלה $\subseteq$ הרגיל (כלומר, $g \leq f$ אם g מוגדרת כמו f על התחום של f, והתחום של g גדול או שווה לתחום של f).

בהינתן שרשרת $\mathcal{C} \subseteq P$, הרי ש-$\bigcup \mathcal{C}$ גם הוא פונקצית בחירה חלקית על $\mathcal{F}$ ולכן חסם מלעיל של $\mathcal{C}$. מכאן שתנאי הלמה של צורן מתקיימים וקיימת פונקציה $f \in P$ מקסימלית ביחס להכלה. נניח בשלילה כי קיימת קבוצה לא ריקה $B \in \mathcal{F}$ כך ש-f אינה מוגדרת על B. מכיוון ש-B לא ריקה קיים $b \in B$. אז $g \triangleq f \cup \{(B, b)\}$ קיימת על פי אקסיומות הזיווג והאיחוד, ומהווה סתירה לכך ש-f מקסימלית ב-P. מכאן שהנחת השלילה שגויה ו-f מוגדרת על כל הקבוצות הלא ריקות ב-$\mathcal{F}$, כנדרש. ■

מסקנה 4.59 אקסיומת הבחירה, עקרון הסדר הטוב והלמה של צורן שקולים כולם.

על התוצאה הזו נסובה בדיחה מתמטית מוכרת של המתמטיקאי ג'רי בונה: "אקסיומת הבחירה בבירור נכונה, עקרון הסדר הטוב בבירור שגוי, ובנוגע ללמה של צורן, מי יודע?"מונים

בפרק 3 עסקנו בעוצמות של קבוצות אינסופיות. אמרנו כי שתי קבוצות הן שוות עוצמה אם קיימת ביניהן התאמה חח"ע ועל, וכי עוצמת קבוצה שיש בינה ובין $\mathbb{N}$ התאמה חח"ע ועל היא **בת מניה**, בעוד שקבוצה שיש התאמה חח"ע ועל בינה ובין $\mathbb{R}$ היא "מעוצמת הרצף". עם זאת, לא הגדרנו במפורש את המושג "עוצמה" בשום מקום.

דרך אחת להגדיר עוצמה, שנראית מתבקשת, היא בתור **מחלקות שקילות** של היחס $A \sim B$ שמוגדר על מחלקת כל הקבוצות. עם זאת, בהגדרה זו עוצמה תהיה מחלקה ממש (כך למשל, לכל סודר α הקבוצה $\{\alpha\}$ היא איבר במחלקת השקילות של כל הקבוצות בעלות איבר יחיד, כך שיש התאמה חח"ע מתוך Ord אל מחלקה זו ולכן היא בהכרח מחלקה ממש). לכן הגישה המועדפת היא להשתמש **בנציג** למחלקת השקילות. נציג כזה מכונה **מונה** (Cardinal Number), והוא יהיה סודר שהוא המינימלי מבין כל הסודרים שמשתייכים לאותה מחלקת שקילות כמוהו.

4.8 מונים

עד כה דיברנו על הסיטואציה בה שתי קבוצות הן "שוות עוצמה": סימנו $A \sim B$ ו-$|A| = |B|$ כדי לתאר את הסיטואציה בה קיימת פונקציה $f : A \to B$ חח"ע ועל. כעת אנו רוצים להעניק משמעות פורמלית לביטוי $|A|$ - **העוצמה** של A. לצורך כך נגדיר סוג מיוחד של סודרים שישמשו בתור עוצמות - **מונים**.

כזכור, $|A| \leq |B|$ פירושו שקיימת פונקציה חח"ע ולאו דווקא על מ-A אל B, והסימון $|A| < |B|$ פירושו $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$.

עבור זוג סודרים α, β כך ש-$\beta \leq \alpha$ קיים איזומורפיזם בין β לקטע התחלתי של α כך שתמיד מתקיים $|\beta| \leq |\alpha|$. **מונה** בא לתאר את השלב שבו העוצמה של הסודרים "קופצת":

הגדרה 4.60 סודר α הוא **מונה** אם $|\beta| < |\alpha|$ לכל $\beta < \alpha$.

טענה 4.61 אם A קבוצה סדורה היטב אז קיים סודר α קטן ביותר כך ש-$|A| = |\alpha|$ ו-α זה הוא מונה.

הוכחה: מכיוון ש-A סדורה היטב, קיים סודר יחיד β כך ש-$A \cong \beta$ ובפרט $|\beta| = |A|$. לכן המחלקה $C = \{\gamma \in \mathrm{Ord} \mid |A| = |\gamma|\}$ לא ריקה ולכן $\alpha = \inf C$ קיים. כדי לראות ש-α הוא מונה יהא $\beta < \alpha$ כלשהו, אז על פי הגדרת α בתור $\inf C$ נקבל ש-$\beta \notin C$ ולכן $|\alpha| = |A| \neq |\beta|$. מכיוון ש-$\beta < \alpha$ נקבל ש-$|\beta| \leq |\alpha|$ ולכן נסיק ש-$|\beta| < |\alpha|$. ■

תוצאה זו מאפשרת לנו להגדיר פורמלית את העוצמה של קבוצות סדורות היטב:

הגדרה 4.62 תהא A קבוצה סדורה היטב. אז נגדיר את העוצמה $|A|$ של A, בתור הסודר הקטן ביותר α כך ש-$\alpha = |A|$.

נשים לב כי הגדרת העוצמה של A מתבססת על כך שקיים ל-A סדר טוב, אבל כל סדר טוב על A יניב את אותה העוצמה:

טענה 4.63 אם A, B שתי קבוצות סדורות היטב כך ש-$|B| = |A|$ ואם $\alpha = |A|$ ו-$\beta = |B|$ אז $\alpha = \beta$.

הוכחה: מכיוון ש-$|B| = |A|$ אז גם $|\beta| = |B| = |A|$. כלומר β הוא סודר כך ש-$\beta = |A|$, ומהגדרת α נקבל ש-$\alpha \leq \beta$. באופן דומה נקבל ש-$\beta \leq \alpha$ ולכן $\alpha = \beta$. ■

טענה זו מצדיקה את השימוש שלנו בסימון $|A| = |B|$ לתיאור קבוצות שוות עוצמה במשמעות של "העוצמה של A היא אותו סודר בדיוק כמו העוצמה של B".

בפרט, אם $A = B$ אנחנו מקבלים שהעוצמה של A מוגדרת היטב במובן זה שהיא זהה עבור כל סדר טוב על A. זה מוביל אותנו להגדרה הכללית הבאה:

הגדרה 4.64 תהא A קבוצה כלשהי (לאו דווקא סדורה היטב). אם קיים סודר α כך ש-$|\alpha| = |A|$ אז העוצמה של A תוגדר להיות העוצמה של α.

לא מובטח שלכל קבוצה יהיה α כנ"ל, ובמקרה זה לא נגדיר את העוצמה של A (אולם קיימות הגדרות אחרות שלא נציג כאן). השאלה שבה נעסוק, אם כן, היא באילו סיטואציות העוצמה של קבוצה A היא מונה. נראה כי לצורך כך היא חייבת להיות **ניתנת לסידור היטב**:

טענה 4.65 תהא A קבוצה כלשהי. אם קיים סודר α כך ש-$|A| \leq |\alpha|$ אז קיים ל-A סדר טוב (ולכן בפרט העוצמה שלה היא מונה).

הוכחה: אם $|A| \leq |\alpha|$ אז קיימת פונקציה $f : A \to \alpha$ חח"ע. פונקציה זו משרה על A את הסדר הטוב של α: $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$. ■

מסקנה 4.66 הטענה "לכל קבוצה A, העוצמה של A היא מונה" שקולה לעקרון הסדר הטוב ולכן לאקסיומת הבחירה.

הוכחה: מצד אחד, ראינו שאם העוצמה של A היא מונה אז היא ניתנת לסידור טוב, ולכן הטענה "העוצמה של כל קבוצה היא מונה" היא הטענה "כל קבוצה ניתנת לסידור טוב" שהיא משפט הסדר הטוב.

מצד שני, אם A היא קבוצה כלשהי אז על פי משפט הסדר הטוב ניתן לסדר את A היטב ואז העוצמה שלה תהיה מונה על פי ההגדרה. ■

התוצאה ש"העוצמה של כל קבוצה היא מונה" שקולה לאקסיומת הבחירה אינה מפתיעה במיוחד - אפשר לראות בה תוצר של ה"התעקשות" שלנו להגדיר עוצמות בעזרת סודרים, שמאלצת אותנו להגדיר סדר טוב על קבוצה לפני שנוכל לדבר על העוצמה שלה, למרות שמושג שוויון העוצמות אינו מתבסס על סדר טוב. הצעד הבא שלנו יהיה להראות שאקסיומת הבחירה נדרשת כאן במובן מהותי בהרבה: ללא אקסיומת הבחירה, בהינתן שתי קבוצות A, B, לא מובטח שמתקיים $|A| < |B|$ או $|A| > |B|$ או $|A| = |B|$.

ראינו עד כה שאם עבור קבוצה כללית A מתקיים $|A| \leq |\alpha|$ אז העוצמה של A קיימת. מה אם קורה המקרה ההפוך, $|\alpha| < |A|$? במקרה זה קיום של פונקציה חח"ע מ-α אל A לא מבטיח שאפשר יהיה לסדר את אברי A בסדר טוב. בפרט, ייתכן שיתקיים $|\alpha| < |A|$ למרות שאין ל-A עוצמה כלל. האם ייתכן, אם כן, שקיימת קבוצה A שמהווה "חסם מלעיל" לכל המונים? התשובה שלילית:

משפט 4.67 אם A קבוצה כלשהי אז קיים סודר α כך ש-$|\alpha| \not\leq |A|$.

הוכחה: נסמן $B \triangleq \{\beta \in \mathrm{Ord} \mid |\beta| \leq A\}$ - אוסף הסודרים שיש התאמה חח"ע מהם אל A.

כל $\beta \in B$ משרה סדר טוב על תת-קבוצה של A. אוסף יחסי הסדר מעל A הוא בעצמו קבוצה, ולכן B היא קבוצה. היא בבירור טרנזיטיבית כי אם $\gamma \in \beta$ אז $\gamma < \beta$ ולכן $|\gamma| \leq |\beta| \leq A$. מכאן ש-$B$ היא סודר, ובהכרח $B \notin B$ מהגדרת סודרים. לכן $|B| \not\leq |A|$, כנדרש. ■

מסקנה 4.68 הטענה "לכל שתי קבוצות A, B מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים: $|A| < |B|$ או $|A| > |B|$ או $|A| = |B|$" שקולה לאקסיומת הבחירה.

הוכחה: בהינתן אקסיומת הבחירה העוצמות של A, B הן מונים, ומכיוון שמונים הם סודרים הם תמיד ניתנים להשוואה.
בכיוון השני, נראה שהטענה גוררת את עקרון הסדר הטוב. תהא A קבוצה כלשהי. על פי המשפט שראינו קודם, קיים סודר α כך ש-$|\alpha| \not\leq |A|$. על פי הטענה נובע מכך ש-$|A| < |\alpha|$ ולכן על פי משפט קודם קיים ל-A סדר טוב. ■

מסקנה 4.69 לכל סודר α קיים מונה β כך ש-$|\alpha| < |\beta|$.

הוכחה: על פי המשפט הקודם, קיים סודר β כך ש-$|\beta| \not\leq |\alpha|$. מכיוון שכל שני סודרים ניתנים להשוואה, נקבל $|\alpha| < |\beta|$. ■

תוצאה זו מאפשרת לנו לבצע את ההגדרה הבאה:

הגדרה 4.70 בהינתן סודר α נסמן ב-α^+ את המונה הקטן ביותר שגדול מ-α. קיים כזה כי הוא שווה ל-$\inf\{\beta \mid |\alpha| < |\beta|\}$ שראינו שאינה ריקה.

משפט 4.71 אם X היא קבוצה של מונים, אז $\sup X$ הוא מונה.

הוכחה: נזכור כי ראינו שאם X היא קבוצה של סודרים אז $\sup X$ הוא סודר, כך שנותר להראות שסודר זה הוא מונה. כלומר, אם $\alpha = \sup X$ יש להראות כי לכל $\beta < \alpha$ מתקיים $|\beta| < |\alpha|$.
נניח בשלילה כי קיים $\beta < \alpha$ כך ש-$|\alpha| \leq |\beta|$, כלומר קיימת פונקציה $f : \alpha \to \beta$ חח"ע. מכיוון ש-$\beta < \alpha$ ו-α הוא החסם העליון של X, לא ייתכן שגם β הוא חסם מלעיל של X ולכן בהכרח קיים $\gamma \in X$ כך ש-$\beta < \gamma$. מכיוון ש-α חסם מלעיל של X נקבל ש-$\gamma \leq \alpha$. מכיוון ש-$\gamma \in X$ ו-X היא קבוצה של מונים הרי ש-γ הוא מונה ולכן $|\beta| < |\gamma|$. מצד שני, $f|_\gamma$ היא פונקציה חח"ע מ-γ לתוך β ולכן $|\gamma| \leq |\beta|$ - סתירה. ■

מצאנו שני כללי בניה שיאפשרו לנו לתאר את כל המונים. את המונים הסופיים - המספרים הטבעיים - אנחנו כבר מכירים. נגדיר כעת את היתר.

הגדרה 4.72 לכל סודר α נגדיר מונה $\aleph_\alpha$ (**אלף-**α) באופן האינדוקטיבי הבא:

- $\aleph_0 \triangleq \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} \triangleq \aleph_\alpha^+$
- אם α גבולי אז $\aleph_\alpha \triangleq \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$

הערה חשובה על סימונים: אנחנו משתמשים באותיות α, β, γ וכדומה כדי לתאר סודרים ובאותיות κ, λ, ρ וכדומה כדי לתאר מונים. כל מונה הוא סודר, כך שההפרדה נראית מיותרת, אבל פעולות החשבון והיחסים של מונים הם שונים. כאשר אנו משתמשים באותיות שבאות לתאר מונים, ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה הן אלו שהוגדרו עבור עוצמות ולא עבור סודרים.
בדומה, אנחנו משתמשים באלפים כדי להתייחס לסודרים כאל מונים עם הפעולות הרלוונטיות של מונים; אם נרצה להתייחס אליהם כסודרים, במקום לכתוב $\aleph_\alpha$ נכתוב ω_α. כך למשל $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ אבל $\omega_0 + \omega_0 \neq \omega_0$ (ולמעשה, $\omega_0 + \omega_0$ אינו מונה כלל).

טענה 4.73 לכל מונה אינסופי κ קיים סודר α כך ש-$\kappa = \aleph_\alpha$.

הוכחה: נתבונן על קבוצת המונים האינסופיים שלא שווים ל-$\aleph_\alpha$ עבור α כלשהו. אם היא ריקה, סיימנו. אחרת יהא κ האיבר הראשון שלה. נתבונן בקבוצה $\{\aleph_\alpha \mid \aleph_\alpha < \kappa\}$. אם קיים בקבוצה זו איבר גדול ביותר $\aleph_\beta$ אז נקבל ש-$\kappa = \aleph_{\beta+1}$ מהגדרת $\aleph_\beta^+$. אחרת, $\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \aleph_\alpha < \kappa\}$. נגדיר $\beta = \sup\{\alpha \mid \aleph_\alpha < \kappa\}$, ונקבל ש-$\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \aleph_\alpha < \kappa\} = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\} = \aleph_\beta$. ■

הוכחה זו מראה שהסדרה לעיל כוללת בתוכה את כל המונים, ולכן מונים נקראים לפעמים גם **אלפים**. שימו לב שההתאמה בין סודרים ומונים היא חח"ע ולכן, מכיוון שהסודרים אינם קבוצה, גם המונים אינם קבוצה.
ללא אקסיומת הבחירה, לא ניתן להוכיח ש-2^κ ניתנת לסידור היטב ולכן לא מובטח שקיים לה מונה, מה שהופך את פעולת החזקה של מונים לבלתי מוגדרת היטב ללא אקסיומת הבחירה. אם מניחים את אקסיומת הבחירה, ניתן להגדיר סדרה נוספת של מונים באופן (שהוא אינטואיטיבי יותר) הבא:

הגדרה 4.74 לכל סודר α נגדיר מונה $\beth_\alpha$ (**בית-**α) באופן האינדוקטיבי הבא:

- $\beth_0 \triangleq \omega$
- $\beth_{\alpha+1} \triangleq 2^{\beth_\alpha}$
- אם α גבולי אז $\beth_\alpha \triangleq \sup\{\beth_\beta \mid \beta < \alpha\}$

הגדרה זו מאפשרת לתת ניסוח קומפקטי לאחת מהתוצאות המפורסמות בתורת הקבוצות:

משפט 4.75 השערת הרצף: $\aleph_1 = \beth_1$.
השערת הרצף המוכללת: $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$ לכל סודר α.

משפטים אלו אינם תלויים באקסיומות תורת הקבוצות, ZFC; משמעות הדבר היא שאם ZFC עקבית, אז גם ZFC בתוספת השערת הרצף עקבית, וגם ZFC בתוספת שלילת השערת הרצף עקבית. משמעות הדבר היא שאם יש מודל לתורת הקבוצות של ZFC, אז קיימים לפחות שני מודלים, שבאחד מהם השערת הרצף נכונה ובאחר היא אינה נכונה.

4.9 חשבון מונים

נזכור כי ראינו כבר את התוצאות הבאות:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ו-$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph + \aleph = \aleph$ ו-$\aleph \cdot \aleph = \aleph$.

פורמלית, משמעות התוצאות הללו הייתה הוכחה ש-$A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \sim A$ ו-$A \times A \sim A$ עבור הקבוצות $A = \mathbb{N}$ ו-$A = \mathbb{R}$.
על בסיס תוצאות אלו ניתן לשאול שתי שאלות:

1. האם לכל מונה $\aleph_\alpha$ מתקיים $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ וגם $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$?
2. האם לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \sim A$ ו-$A \times A \sim A$?

התשובה לשאלה הראשונה היא **כן**. מכאן נובע שבהינתן אקסיומת הבחירה, גם התשובה לשאלה השניה היא כן. יתר על כן - ניתן להוכיח שקיום 2 גורר את אקסיומת הבחירה.
האתגר שלנו יהיה להוכיח כי $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ ומכך תנבע התוצאה עבור חיבור. לשם כך, נשתמש בסימון ω_α כדי לתאר את $\aleph_\alpha$ אבל עם יחס הסדר הרגיל של סודרים.
הרעיון יהיה להגדיר סידור היטב של המחלקה $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ של זוגות של סודרים, בצורה כזו שהקבוצה $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ תהיה איזומורפית ל-ω_α.

הגדרה 4.76 הסדר הקנוני על $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ מוגדר כך:

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\beta) < (\gamma,\delta) \iff & \max\{\alpha,\beta\} < \max\{\gamma,\delta\} \\
& \vee \max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\} \wedge \alpha < \gamma \\
& \vee \max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\} \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta
\end{aligned}
$$

כלומר, בבואנו להשוות שני זוגות סודרים, ראשית נשווה את הסודר הגדול מבין השניים בכל אחד מהזוגות, ואם הוא זהה, נשווה את שני הזוגות לפי סדר מילוני רגיל.
התחלת הסדר נראית כך:

$$
\begin{aligned}
&(0,0) < \\
&\quad < (0,1) < (1,0) < (1,1) \\
&\quad < (0,2) < (1,2) < (2,0) < (2,1) < (2,2) \\
&\quad < (0,3) < (1,3) < (2,3) < (3,0) < (3,1) < (3,2) < (3,3) \\
&\quad \vdots \\
&\quad < (0,\omega) < (1,\omega) < \cdots < (\omega,0) < \cdots < (\omega,\omega) \\
&\quad < (0,\omega+1) < (1,\omega+1) < \cdots < (\omega+1,0) < \cdots < (\omega+1,\omega+1) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

כל "שורה" בסדר מתאימה לערך של $\max\{\alpha,\beta\}$; בשורה הזו מצויים בדיוק כל האיברים שעבורם מתקבל הערך הזה של המקסימום. קל לראות שזה סדר טוב על ידי בדיקה ישירה.

השורה שמתאימה לסודר α תהיה אם כן בדיוק מהצורה הבאה:

$$(0,\alpha) < (1,\alpha) < \cdots < (\alpha,0) < (\alpha,1) < \cdots < (\alpha,\alpha)$$

הקבוצה $\alpha\times\alpha=\{(\beta,\gamma)\mid\beta,\gamma<\alpha\}$ כוללת את האיברים מכל השורות **שלפני** השורה של α, ולכן $\alpha\times\alpha$ היא בדיוק הקטע ההתחלתי שנתון על ידי האיבר $(0,\alpha)$ (הראשון בשורה של α).

בסדר זה נשתמש לצורך הוכחת המשפט הבא:

טענה 4.77 $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$.

הוכחה: המטרה שלנו, כזכור, היא למצוא פונקציה חח"ע ועל מ-$\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ אל ω_α. לשם כך נגדיר התאמה $\Gamma:\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}\to\mathrm{Ord}$ שכשנצמצם אותה ל-$\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ נקבל את המבוקש.

ההתאמה תוגדר כך: $\Gamma((\alpha,\beta))$ יהיה שווה לטיפוס הסדר של הקטע ההתחלתי של $\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}$ שמוגדר על ידי (α,β), כלומר לטיפוס הסדר של הקבוצה $\{(\gamma,\delta)\mid(\gamma,\delta)<(\alpha,\beta)\}$.

Γ היא חח"ע, אחרת היינו מקבלים שני קטעים התחלתיים שונים של $\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}$ בעלי אותו טיפוס סדר; מכיוון שאחד מהם הוא קטע התחלתי של השני, זה היה מוביל לסתירה.

אפשר להראות ש-Γ היא על בכך שמראים שכל סודר יכול להתקבל מהפעלת Γ על (α,β) באינדוקציה על-סופית, ובאופן דומה אפשר להראות ש-Γ ו-Γ^{-1} משמרות סדר.

כעת נבדוק מהו $\Gamma(\omega\times\omega)$. שימו לב כי $\omega\times\omega$ איננו **איבר** שעליו Γ פועלת, אלא **קבוצה של איברים**; אנחנו רוצים לדעת מה תהיה התמונה של Γ כאשר היא תצומצם לפונקציה שתחומה $\omega\times\omega$.

כזכור, $\omega\times\omega$ הוא הקטע ההתחלתי המוגדר על ידי $(0,\omega)$, כלומר אוסף כל הזוגות (n,k) כך ש-$n,k\in\mathbb{N}$. קל לראות שעם יחס הסדר שהגדרנו, כל איבר (n,k) כזה איזומורפי למספר טבעי ייחודי, כך ש-$\omega=\Gamma(\omega\times\omega)$.

באופן כללי, הפונקציה שמוגדרת על ידי $\alpha\mapsto\Gamma(\alpha\times\alpha)$ היא משמרת סדר כי Γ משמרת סדר, ומכיוון שזו פונקציה מקבוצה סדורה היטב לעצמה אז $\alpha\le\Gamma(\alpha\times\alpha)$ לכל α.

נניח כעת בשלילה שקיים ω_α כך ש-$\Gamma(\omega_\alpha\times\omega_\alpha)\neq\omega_\alpha$ וניקח אותו להיות המונה המינימלי שמקיים זאת. כלומר, מתקיים $\omega_\alpha<\Gamma(\omega_\alpha\times\omega_\alpha)$. ניקח את המקור של ω_α על פי Γ: $\Gamma((\beta,\gamma))=\omega_\alpha$. בגלל ש-$\Gamma$ משמרת סדר, בהכרח $(\beta,\gamma)<(0,\omega_\alpha)$ ולכן $\beta,\gamma<\omega_\alpha$. מכיוון ש-$\omega_\alpha$ הוא מונה אז הוא בפרט סודר גבולי, ולכן קיים סודר $\delta<\omega_\alpha$ כך ש-$\beta,\gamma<\delta$. מכאן ש-$(\beta,\gamma)\in\delta\times\delta$ ולכן $\omega_\alpha=\Gamma((\beta,\gamma))\subseteq\Gamma(\delta\times\delta)$.

מכיוון ש-$\Gamma(\delta\times\delta)$ איזומורפי לקבוצה $\delta\times\delta$ בפרט נקבל ש-$\aleph_\alpha=|\omega_\alpha|\le|\Gamma(\delta\times\delta)|=|\delta\times\delta|$

מצד שני, $\delta<\omega_\alpha$ ולכן $|\delta|<\omega_\alpha$ - כלומר, המונה $|\delta|$ מקיים את התכונה $|\delta|=|\delta|\cdot|\delta|$ ולכן נקבל $\aleph_\alpha\le|\delta\times\delta|=|\delta|\cdot|\delta|=|\delta|<\omega_\alpha=\aleph_\alpha$ והגענו לסתירה להנחה ש-$\Gamma(\omega_\alpha\times\omega_\alpha)\neq\omega_\alpha$. ■

טענה 4.78 $\aleph_\alpha+\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$.

הוכחה: מחשבון עוצמות: $\aleph_\alpha\le\aleph_\alpha+\aleph_\alpha=\aleph_\alpha\cdot2\le\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$. ■

מסקנה 4.79 $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$. אז $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = \aleph_\beta$ ובדומה גם עבור כפל. ■

כעת נראה שתוצאה זו עבור קבוצות כלליות שקולה לאקסיומת הבחירה:

משפט 4.80 (טרסקי) הטענה "לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $A \times A \sim A$ " גוררת את אקסיומת הבחירה.

הוכחה: תהא A קבוצה כלשהי ונראה כי A ניתנת לסידור בסדר טוב. אם A סופית אז על פי הגדרה קיימת התאמה חח"ע ועל בינה ובין סודר שהוא מספר טבעי ולכן היא ניתנת לסידור טוב. על כן ניתן להניח ש-A אינסופית. יהא α סודר כך ש-$|A| \nleq \alpha$ (הוכחנו קיום של סודר כזה באחד מהמשפטים הקודמים). בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח ש-A זר ל-α (אחרת נמשיך עבור $A \times \{0\}$, והמעבר מסדר טוב על $A \times \{0\}$ לסדר טוב על A הוא טריוויאלי). על פי ההנחה שלנו, קיימת פונקציה $f : (A \cup \alpha) \to (A \cup \alpha) \times (A \cup \alpha)$ שהיא חח"ע ועל.

יהא $a \in A$ כלשהו, אז $\alpha \times \{a\}$ הוא תת-קבוצה של $(A \cup \alpha) \times (A \cup \alpha)$. אם היה מתקיים ש-$\alpha \times \{a\} \subseteq f(A)$ היה נובע מכך קיום פונקציה חח"ע $g : \alpha \to A$ שמוגדרת באופן הבא: $g(\beta) = f^{-1}((\beta, a))$ לכל $\beta \in \alpha$. מכאן שלא מתקיים $\alpha \times \{a\} \subseteq f(A)$, כלומר הקבוצה $S_a = \{\gamma \in \alpha \mid f(\gamma) \in \alpha \times \{a\}\}$ אינה ריקה, וזאת לכל $a \in A$. זה מאפשר לנו להגדיר פונקציה חח"ע $g : A \to \alpha$ באופן הבא: $g(a) = \min S_a$.

כדי לראות ש-g אכן חח"ע, נשים לב שעל פי הגדרה, אם $\gamma = g(a) = g(b)$ אז $f(\gamma) \in (\alpha \times \{a\}) \cap (\alpha \times \{b\})$, מה שאפשרי רק אם $a = b$.

ראינו כבר שקיום פונקציה חח"ע $g : A \to \alpha$ גורר סדר טוב על A, מה שמסיים את ההוכחה. ■

אנקדוטה מפורסמת מספרת כי כאשר טרסקי ניסה לפרסם את המאמר שתיאר את המשפט הזה, הוא נדחה בידי שני מתמטיקאים בכירים, לבג ופרשה. פרשה טען כי אין שום דבר מעניין בהוכחת גרירה בין שתי טענות שיודעים שהן נכונות; לבג טען שאין שום עניין בהוכחת גרירה בין שתי טענות שיודעים שהן שגויות.

4.10 דוגמאות לשימושים

נראה כעת מספר דוגמאות למקרים שבהם מופיע באופן טבעי שימוש בסודרים/אקסיומת הבחירה.

4.10.1 משפט ויירשטראס על פונקציה רציפה בקטע סגור

משפט ידוע בחשבון אינפיניטסימלי הוא זה:

משפט 4.81 אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה אז f חסומה.

נזכיר כי $f : A \to \mathbb{R}$ היא **חסומה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש-$|f(a)| \leq M$ לכל $a \in A$.

כמו כן $f : A \to \mathbb{R}$ היא **רציפה** אם לכל $a \in A$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-$|a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$ לכל $b \in A$.

הדרך המקובלת בחשבון אינפיניטסימלי להוכיח את משפט ויירשטראס היא באמצעות שימוש במשפט **בולצאנו-ויירשטראס** שמדבר על קיום תת-סדרה מתכנסת לכל סדרה חסומה של נקודות בקטע סגור ב-$\mathbb{R}$. אנו נציג הוכחה אחרת שאינה דורשת שימוש בבולצאנו-ויירשטראס ובמובנים מסויימים היא תואמת יותר את האינטואיציה שלנו.

נוכיח את המשפט עבור הקטע $[0,1]$ על מנת לפשט את הסימונים; ההוכחה זהה גם עבור קטעים אחרים.

הרציפות של f תבוא לידי ביטוי בשתי טענות עזר פשוטות:

טענה 4.82 תהא $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה.

1. אם f חסומה בקטע $[0,a]$ עבור $a < 1$ אז קיים $b > a$ כך ש-f חסומה בקטע $[0,b]$
2. תהא $A \subseteq [0,1]$. אם f חסומה בקטע $[0,a]$ לכל $a \in A$ ו-$b = \sup A$ אז f חסומה בקטע $[0,b]$.

הוכחה: עבור 1 נשתמש בהגדרת הרציפות ב-a עבור $\varepsilon = 1$: נקבל שקיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - a| < \delta$ ו-$x \in [0,1]$ אז $|f(x) - f(a)| < 1$.

אם $a < 1$ אז הקבוצה $[0,1] \cap (a, a+\delta)$ לא ריקה; תהא b כלשהי מתוכה.

אנו יודעים ש-f חסומה ב-$[0,a]$; יהא M החסם המתאים. נראה ש-f חסומה בקטע $[0,b]$ עם החסם $M+1$.

יהא $x \in [0,b]$. אם $x \in [0,a]$ אז $|f(x)| \leq M$.

אם $a < x$ אז $x \in (a,b] \subseteq (a, a+\delta)$ ולכן $|f(x) - f(a)| < 1$.
מאי שוויון המשולש נקבל:

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + M$$

כמבוקש.
נעבור כעת להוכחת 2. מרציפות f, שוב נוכל למצוא δ כך שאם $|x-b| < \delta$ אז $|f(x) - f(b)| < 1$, כלומר $|f(x)| < 1 + |f(b)|$. מכיוון ש-$b = \sup A$, קיים $a \in A$ כך ש-$b - a < \delta$. נסמן ב-M את החסם של f בקטע $[0,a]$.
כעת, יהא $x \in [0,b]$ כלשהו. אם $x \leq a$ אז $|f(x)| < M$. אחרת, $a < x \leq b$ ולכן $b - x \leq b - a < \delta$ ולכן $|f(x)| < 1 + |f(b)|$. קיבלנו שחסם על f בקטע $[0,b]$ הוא $\max\{M, 1+|f(b)|\}$. ■

שתי תוצאות אלו הן האופן שבו תכונת ה**רציפות** באה לידי ביטוי. בנוסף לכך, המשפט מתבסס על כך ש-f מוגדרת על **הממשיים** $\mathbb{R}$ בכך שהוא מניח ש-$\sup A$ קיים לכל $A \subseteq [0,1]$.
כעת קל להוכיח את משפט ויירשטראס באמצעות סודרים: **הוכחה:** נגדיר סדרה על-סופית $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ באופן הבא:

1. $a_0 = 0$

2. אם $a_\alpha = 1$ אז $a_{\alpha+1} = 1$; אחרת אם f חסומה בקטע $[0, a_\alpha]$ אז $a_{\alpha+1} = b$ כאשר $b > a_{\alpha+1}$ הוא האיבר שקיומו מובטח מהטענה שהוכחנו קודם.

3. אם α גבולי אז $a_\alpha = \sup\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

קל לראות באינדוקציה על-סופית שהסדרה אכן מוגדרת היטב ולכל α מתקיים ש-f חסומה בקטע $[0, a_\alpha]$: החסימות על $[0,0]$ היא טריוויאלית ובשני המקרים האחרים היא נובעת מטענת העזר שהוכחנו קודם.
אם ההתאמה $\alpha \mapsto a_\alpha$ הייתה חח"ע, היינו מקבלים התאמה חח"ע בין Ord ובין אברי $[0,1]$ וזה בלתי אפשרי כי Ord איננה קבוצה. האופן היחיד שבו בסדרה שהגדרנו איבר יכול לחזור על עצמו היא אם מתקיים $a_\alpha = 1$ באחד משלבי הבניה. מכאן ש-f רציפה ב-$[0,1]$, כמבוקש. ■

4.10.2 אי-קיום מידה על כל $\mathbb{R}$

בחשבון אינפיניטסימלי, ההגדרה של **אינטגרל רימן** מתבססת על הגדרת **האורך** של קטע: האורך של $[a,b]$ הוא $b-a$.
אחת מהסיבות שבגללן אינטגרל רימן הוא מוגבל היא בכך שמושג האורך שהוא מתבסס עליו תקף רק לקטעים. האופן שבו **אינטגרל לבג** מתגבר על הקושי הזה ומכליל את אינטגרל רימן הוא באמצעות הכללת מושג האורך של קטע גם לקבוצות שאינן קטעים, באמצעות **פונקציית מידה**. אחת מהתוצאות הבסיסיות בתורת המידה היא חוסר היכולת שלנו להגדיר פונקציית מידה שתקיים מספר תכונות טבעיות בו-זמנית ועדיין תהיה מוגדרת לכל תת-קבוצה של $\mathbb{R}$; זה מצדיק את העובדה שהמידה שעליה מתבסס אינטגרל לבג - **מידת לבג** - אינה מוגדרת לכל תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

משפט 4.83 לא קיימת פונקציה $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ המקיימת בו זמנית את שלוש התכונות הבאות:

1. $\mu([a,b]) = b - a$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$.

2. אם $A_0, A_1, A_2, \ldots$ קבוצות זרות אז $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ **(סיגמה-אדיטיביות)**.

3. אם $A \subseteq \mathbb{R}$ ו-$x \in \mathbb{R}$ ונסמן $A + x \triangleq \{a + x \mid a \in A\}$ אז $\mu(A) = \mu(A+x)$ **(אינוריאנטיות להזזות)**

הוכחה: נתבונן בקטע $[0,1)$. אנו מצפים שיתקיים $\mu([0,1)) = 1$ מכיוון ש-$\mu([0,1]) = 1 - 0 = 1$ ו-$\mu([1,1]) = 1 - 1 = 0$ ו-

$$\mu([0,1)) = \mu([0,1]) - \mu([1,1]) = 1 - 0 = 1$$

רעיון ההוכחה יהיה לפרק את הקטע $[0,1)$ לאיחוד בן מניה של קבוצות זרות שכולן מאותה מידה. כלומר, נמצא קבוצות זרות $A_0, A_1, A_2, \ldots$ כך ש-$[0,1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ וקיים a כך ש-$\mu(A_n) = a$ לכל n.
בהינתן אוסף קבוצות זה, הסיגמה-אדטיביות של μ גוררת מייד את התוצאה הבאה:

$$1=\mu\left([0,1)\right)=\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu\left(A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a=\begin{cases}\infty & a>0\\ 0 & a=0\end{cases}$$

וזוהי סתירה.

חלוקה של $[0,1]$ למספר **סופי** של קטעים מאותה מידה היא קלה: פשוט מחלקים לקטעים מהצורה $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$. האתגר שעבורו נזדקק לתורת הקבוצות הוא חלוקה ל**אינסוף** קבוצות. בפרט, נזדקק לאקסיומת הבחירה. זוהי המחשה לאופן שבו תורת המידה ותורת הקבוצות הולכות יד ביד.

נגדיר על $[0,1]$ יחס שקילות "מודולו $\mathbb{Q}$". פורמלית, $a\sim b$ אם ורק אם $a-b\in\mathbb{Q}$. קל לבדוק על פי ההגדרה שזהו יחס שקילות.

כעת נשתמש באקסיומת הבחירה על מנת לבנות קבוצה A שתכלול בדיוק נציג אחד של כל מחלקת שקילות של היחס.

תהא $q_0,q_1,q_2,\ldots$ מניה כלשהי של הרציונליים בקטע $[0,1)$. נגדיר את הקבוצות שלנו כך:

$$A_n=A+q_n\ (\mathrm{mod}\ 1)\triangleq\{a+q_n\mid a\in A,a+q_n<1\}\cup\{a+q_n-1\mid a\in A,a+q_n\geq 1\}$$

.

לכל $b\in[0,1)$ קיים נציג $a\in A$ למחלקת השקילות שלו. אם $a\leq b$ אז $b-a=q_n$ הוא רציונלי ב-$[0,1)$ ולכן $b=a+q_n\in A_n$ כי $a+q_n<1$.

אם $a>b$ אז מכיוון ש-$0\leq b<a\leq 1$ הרי ש-$a-b$ הוא רציונלי בקטע $(0,1]$ ולכן $q_n=1-(a-b)$ הוא רציונלי ב-$[0,1)$ ו-$a+q_n\geq 1$. מכאן ש-$b=a+q_n-1\in A_n$ גם במקרה זה.

קיבלנו ש-$b\in A_n$ עבור n כלשהו לכל $b\in[0,1)$. לכן $[0,1)=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ כנדרש, מה שמסיים את ההוכחה. ■

4.10.3 הפרדוקס של בנך-טרסקי

הפרדוקס של בנך-טרסקי הוא הטענה הבאה: ניתן לקחת את כדור היחידה במרחב $\mathbb{R}^3$, לפרק אותו למספר תת-קבוצות, להפעיל על תת-קבוצות אלו איזומטריות של המרחב ולקבל כתוצאה שני כדורים מאותו נפח כמו הכדור המקורי.

ההוכחה המלאה של הטענה היא ארוכה יחסית ומתבססת על מספר שלבים שכל אחד מהם פשוט יחסית בפני עצמו. כאן נסקור את השלבים ללא הוכחות מלאות, ונתמקד בשימושים של המושגים והטכניקות שראינו (אקסיומת הבחירה, יחסי שקילות, המלון של הילברט).

הגדרה 4.84 קבוצה X היא **פרדוקסלית** ביחס לקבוצת פעולות המוגדרות מעל X, $G\subseteq\{g:X\to X\}$ אם קיים ל-X פירוק לאיחוד **זר** של קבוצות $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m$ וקיימות פעולות $g_1,\ldots,g_n\in G$ ו-$h_1,\ldots,h_m\in G$ כך ש-$X=\bigcup_{i=1}^{n}g_i\left(A_i\right)=\bigcup_{j=1}^{m}h_j\left(B_j\right)$.

נציג דוגמא שתהיה שימושית לנו בהמשך - החבורה החופשית F הנוצרת על ידי $\{a,b\}$. גם מבלי להכיר את תורת החבורות, ההגדרה של החבורה הזו היא פשוטה: אוסף כל המחרוזות שניתן לכתוב באמצעות הסימנים a,b,a^{-1},b^{-1} כך שאין מופעים עוקבים של a,a^{-1} או b,b^{-1} (אפשר לחשוב על איברים אלו כאילו שרשור שלהם גורם לביטול הדדי). החבורה כוללת גם את המחרוזת הריקה - מחרוזת מאורך אפס שמסומנת כ-ε. על הקבוצה הזו מוגדרת "פעולה" בין כל שתי מילים - השרשור שלהן, תוך צמצום איברים שמתבטלים. למשל $aba\cdot a^{-1}b=abb$.

נראה כעת כי F פרדוקסלית ביחס לסט הפעולות של שרשור אות מבין $\left\{a,b,a^{-1},b^{-1}\right\}$ בתחילת המילה. נסמן ב-$F\left(a\right)\triangleq$ $\{aw\mid w\in F\}$ את קבוצת המילים שמתחילות ב-a, ובדומה עבור כל ארבעת הסימונים. אז $F=F\left(a\right)\cup F\left(a^{-1}\right)\cup F\left(b\right)\cup$ $F\left(b^{-1}\right)\cup\{e\}$.

כעת קל לראות ש-$F=F\left(a\right)\cup a\cdot F\left(a^{-1}\right)$ ובדומה $F=F\left(b\right)\cup b\cdot F\left(b^{-1}\right)$ ולכן הפירוק לעיל הוא פרדוקסלי (את הקבוצה $\{e\}$ אנו מצרפים שרירותית לאחד הפירוקים).

הפרדוקסליות של בנך-טרסקי נובעת מתוצאה זו - בנך-טרסקי עוסק בנסיון "להרים" אותה מעולם תורת החבורות אל המרחב האוקלידי.

משפט 4.85 (פרדוקס בנך-טרסקי) יהא $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$. אז B פרדוקסלית ביחס לחבורה G של האיזומטריות של $\mathbb{R}^3$.

איזומטריה היא פונקציה חח"ע ועל שגם משמרת מרחקים. האיזומטריות במרחב כוללות בין היתר הזזות, סיבובים ושיקופים. לא נזדקק כאן למלוא הפרטים אלא רק לתכונות הבאות:

- האיזומטריות במרחב מהוות **חבורה** ביחס לפעולת ההרכבה. כלומר: אם g, h איזומטריות כך גם gh וכך גם g^{-1}, ופונקציית הזהות גם היא איזומטריה.
- החבורה הזו כוללת תת-חבורה שאיזומורפית לחבורה החופשית F שראינו קודם.

בעזרת תכונות אלו נוכל להוכיח את הצעד המרכזי בדרך אל בנך-טרסקי - פרדוקס האוסדרוף.

משפט 4.86 (פרדוקס האוסדורף): תהא $S^2 \triangleq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$ הספירה התלת-ממדית, אז קיימת קבוצה **בת-מניה** $D \subseteq S^2$ כך שהקבוצה $X \triangleq S^2 \backslash D$ היא פרדוקסלית ביחס לחבורת האיזומטריות במרחב.

תהא G חבורת איזומטריות כלשהי שהיא פרדוקסלית. נראה כיצד ניתן להשתמש בה כדי לקבל את X המבוקשת. מכיוון ש-F שתיארנו לעיל פרדוקסלית, זה ישלים את ההוכחה (אבל נוכיח ל-G פרדוקסלית כללית כדי לראות את הרעיונות הכללים של ההוכחה).

נניח ש-G פרדוקסלית עם הפירוק $G = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_1 \cup \cdots \cup B_m$ והפונקציות $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m$.

נשים לב שאיזומוטריה מעבירה נקודות על ספירת היחידה לנקודות על ספירת היחידה (כי המרחק שלהן מ-0 אמור להישמר). אם ניקח $x \in S_2$ כלשהו ונגדיר $C(x) \triangleq \{\rho(x) \mid \rho \in C\}$ עבור $C \subseteq G$ כלשהי, אז נקבל ש-$G(x) = A_1(x) \cup \cdots \cup A_n(x) \cup$ $B_1(x) \cup \cdots \cup B_m(x)$ הוא פירוק פרדוקסלי של $G(x)$, בתנאי שכל הקבוצות זרות (כאשר כאן הפעלה של פונקציה g מוגדרת כך: $g(C(x)) \triangleq \{g((x))) \mid \rho \in C\}$).

$G(x)$ היא בוודאי תת-קבוצה של ספירת היחידה. הבעיה היא שזו אינה תת-קבוצה גדולה במיוחד; G היא בת מניה ולכן זו תהיה תת-קבוצה בת מניה. כלומר, הראינו שחתיכה קטנה של S^2 פרדוקסלית, אבל אנחנו רוצים להראות זאת כמעט לכל S^2. לכן נצטרך לחזור על התהליך עם x' נוסף שאינו שייך ל-$G(x)$ וכן הלאה. כאן באה לעזרתנו אקסיומת הבחירה.

נסמן $x \sim y$ אם קיים $g \in G$ כך ש-$g(x) = y$. בלשון תורת הקבוצות אומרים ש-x, y שייכים לאותו **מסלול** (Orbit) של G. קל לראות שזהו יחס שקילות בהתבסס על כך ש-G היא חבורה. כעת נבחר קבוצת נציגים M של מחלקות השקילות ב-$S^2/\sim$ - זה השלב שבו אנו משתמשים באקסיומת הבחירה.

על פי ההגדרה, נקבל כעת ש-$S^2 = G(M) \triangleq \{g(x) \mid g \in G, x \in M\}$. בדומה נגדיר $A_i^* = A_i(M)$ ו-$B_i^* = B_i(M)$. וקיבלנו פירוק פרדוקסלי של S^2 למעט הקושי שלא כל הקבוצות באיחוד זרות. כלומר, ייתכן שיש $g, h \in G$ ו-$x, y \in M$ כך ש-$g(x) = h(y)$, כלומר $x = g^{-1}(h(y))$. מכיוון ש-$g^{-1}h \in G$ נקבל ש-$y \sim x$. אם $x \neq y$ זוהי סתירה לכך שב-M יש רק נציג אחד לכל מחלקת שקילות; על כן, $x = g^{-1}h(x)$. במילים אחרות, $x \in M$ הוא בעייתי אם הוא **נקודת שבת** של G, כלומר אם קיים $f \in G$ כך ש-$f(x) = x$.

ניתן להראות כי אוסף כל נקודות השבת של איזומטריה הוא ישר במרחב (למשל, עבור סיבובים זהו ציר הסיבוב ועבור שיקופים זהו ציר השיקוף). מכיוון שישר במרחב חותך את S^2 בדיוק בשתי נקודות נקבל שלכל $f \in G$ קיימים לכל היותר שני $x \in S^2$ כך ש-$f(x) = x$. מכיוון ש-G בת מניה, נקבל ש-$D = \left\{x \in S^2 \mid \exists f \in G : f(x) = x\right\}$ היא בת מניה ולכן G פועלת פרדוקסלית על $S^2 \backslash D$ ללא התנגשויות. זה מסיים את הוכחת פרדוקס האוסדורף.

על מנת לעבור מפרדוקס האוסדורף לפרדוקס בנך-טרסקי נזדקק להגדרה הבאה:

הגדרה 4.87 שתי קבוצות A, B הן **חופפות בחלקים** ביחס ל-G ונסמן זאת $A \sim B$ אם קיימים פירוקים לקבוצות זרות $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ו-$B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ ופונקציות $g_1, \ldots, g_n \in G$ כך ש-$g_i(A_i) = B_i$.

ניתן להוכיח כי $A \sim B$ הוא יחס שקילות. נשים לב גם כי X פרדוקסלית אם ורק אם קיים לה פירוק לאיחוד זר $X = A \cup B$ כך ש-$A \sim X$ ו-$B \sim X$ (ולכן $A \sim B$). מסקנה נוספת היא שאם $A \sim B$ ו-B פרדוקסלית אז גם A פרדוקסלית (הדבר דורש הוכחה לא טריוויאלית אבל גם לא מסובכת). בהינתן תוצאה זו, נרצה להראות כי $S^2 \backslash D \sim S^2$ ובכך "ניפטר" מהקושי של הקבוצה D.

הבעיה בחפיפה של S^2 עם $S^2 \backslash D$ היא שלא ברור לאן להעביר את אברי D. הסיטואציה הזו מזכירה מאוד את המלון של הילברט, ותיפתר באופן דומה באמצעות דחיקת השגיאה לאינסוף. נניח כי מצאנו $g \in G$ כך שכל הקבוצות $g^n(D)$ הן זרות זו לזו ונגדיר $\overline{D} \triangleq \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(D)$. נשים לב לכך ש-$g^0(D) = D$ ולכן $g(\overline{D}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^n(D) = \overline{D} \backslash D$.

כעת, החפיפה $S^2 \sim S^2 \backslash D$ תתקבל על ידי הפירוקים הבאים:

$$S^2 = \left(S^2 \backslash \overline{D}\right) \cup \overline{D}$$

$$S^2 \backslash D = \left(S^2 \backslash \overline{D}\right) \cup g\left(\overline{D}\right)$$

כאשר $S^2 \backslash \overline{D}$ בשתי הקבוצות חופפים עם פונקצית הזהות, ואילו $\overline{D}, g\left(\overline{D}\right)$ בבירור חופפים בעזרת g.

עלינו עדיין להראות כי קיימת $g \in G$ כך ש-$g^n(D)$ כולן זרות. נבחר את g להיות סיבוב; מכיוון שיש לנו היצע לא בן-מניה של סיבובים אפשריים ואילו D בת מניה, נוכל להראות שקיים סיבוב מתאים שלא יוצר התנגשויות, בצורה הבאה:

ראשית, נבחר את ציר הסיבוב של g להיות ישר שעובר דרך ראשית הצירים ולא דרך D. מכיוון ש-D בת מניה ויש מספר לא בן מניה של ישרים שעוברים דרך הראשית, הרי שקיים ישר אחד כזה לפחות. כעת תהא g_θ איזומטריית הסיבוב בזווית $0 \leq \theta \leq 2\pi$ סביב ציר זה. מכיוון שציר הסיבוב לא עובר דרך D, אין לסיבוב נקודות שבת מתוך D: לכל $p \in D$ מתקיים $g_\theta(p) \neq p$. בפרט זה גורר גם שאין התנגשויות של נקודה עם עצמה עבור סיבובים שונים: אם $g_{\theta_1}(p) = g_{\theta_2}(p)$ אז ינבע מכך ש-$g_{\theta_1-\theta_2}(p) = p$, בסתירה.

כעת, אם g מייצרת התנגשות זה אומר שקיימים $m > k$ ו-$p, q \in D$ כך ש-$g_\theta^m(p) = g_\theta^k(q)$, עבור זווית θ כלשהי, כלומר $g_\theta^{m-k}(p) = q$. נסמן $n = m - k$. קיבלנו שכל התנגשות מאופיינת על ידי שלשה (n, p, q) כאשר n טבעי ו-p, q אברי הקבוצה בת המניה D, כך שקיים רק מספר בן-מניה של התנגשויות אפשריות. כל שלשה כזו מבטלת לכל היותר זווית אפשרית אחת: אם עבור שתי זוויות θ_1, θ_2 תהיה התנגשות בפרט נקבל ש-$g_{\theta_1}^n(p) = g_{\theta_2}^n(p)$ וכבר ראינו שבגלל שאין ל-g נקודות שבת זה בלתי אפשרי עבור $\theta_1 \neq \theta_2$.

מכאן שכל ההתנגשויות האפשריות מבטלות לנו רק קבוצה בת מניה של זוויות אפשריות ולכן יש זווית θ שעבורה נקבל פונקציה g מתאימה, מה שמסיים את ההוכחה של $S^2 \sim S^2 \backslash D$.

כעת נעבור לדבר על המקרה של כדור. נתבונן ב-$B \backslash \{(0,0,0)\}$ - כדור היחידה ללא הראשית. ההתאמה $p \mapsto \{\alpha p \mid 0 < \alpha \leq 1\}$ מתאימה לכל נקודה על S^2 קטע מתוך הכדור; נפרק כעת את הכדור בהתאם לפירוק הפרדוקסלי של S^2 (אם p שייכת לקבוצה מסויימת, אז כל הנקודות בקטע שמתאים לה בכדור יהיו באותה קבוצה). נותר להראות שכדור מנוקב זה חופף בחלקים ל-B, והדבר מתבצע באופן דומה להוכחה ש- $S^2 \sim S^2 \backslash D$. זה מסיים את הוכחת בנך-טרסקי.

מפתח